

des deux intégrales sont égales pour des fonctions continues, mais, avec la définition de Riemann, les mathématiciens savent intégrer des fonctions plus générales incluant par exemple des fonctions qui ont un nombre infini de discontinuités.

Avec l'intégrale de Riemann, on ne sait pas intégrer la fonction de Dirichlet, car sur chaque petit intervalle la fonction f oscille entre 0 et 1 : quel que soit l'intervalle, et aussi petit soit-il, il y a une infinité de valeurs rationnelles de l'abscisse pour lesquelles la valeur de la fonction de Dirichlet vaut 1 et une infinité de valeurs irrationnelles pour lesquelles la valeur de la fonction vaut 0. L'intégrale de Riemann dite «supérieure», selon les définitions de Darboux, est égale à 1 si l'on choisit des valeurs de l'abscisse x_i parmi les rationnels et l'intégrale «inférieure» est égale à 0 si l'on choisit les valeurs de x_i parmi les irrationnels. Or tout segment, aussi petit soit-il, contient une infinité de rationnels et une infinité plus grande encore d'irrationnels : la valeur de l'intégrale de Riemann de la fonction de Dirichlet n'est pas définie.

L'INTÉGRALE DE LEBESGUE

Lebesgue a un point de vue différent : au lieu de découper le segment $[a, b]$ en parties, il découpe en tranches l'intervalle des valeurs de la fonction $f(x)$ et réunit dans un même lot les «intervalles» pour lesquels la fonction est comprise entre deux valeurs. Puis Lebesgue définit deux sommes et quand ces deux sommes ont la même limite (alors que la valeur du plus grand des intervalles de valeur de la fonction tend vers zéro), la fonction f est «intégrable».

Dans sa note, Lebesgue donne un exemple particulièrement simple d'une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et croissante, pour laquelle les deux définitions des intervalles à la Riemann et à la Lebesgue coïncident. Bien évidemment, Lebesgue voulait élargir les ensembles de fonctions qu'il pouvait intégrer par son découpage. L'exemple le plus simple est une fonction de Dirichlet.

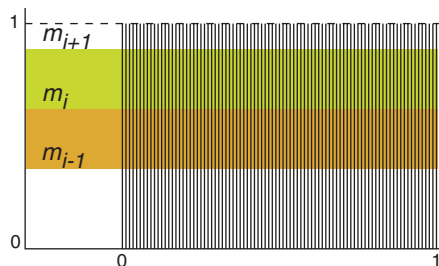


Illustration du calcul de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction de Dirichlet qui a pour valeur 1 sur l'ensemble des rationnels du segment $[0, 1]$ et 0 sur les irrationnels du même segment.

L'intégrale de Lebesgue de la fonction de Dirichlet considérée revient à additionner deux valeurs sur des ensembles différents, l'une égale à 1 pour les nombres rationnels sur un ensemble de mesure nulle (donc cette contribution des rationnels est égale à zéro), et l'autre égale à 0 sur l'ensemble des irrationnels dont la mesure est égale à 1, mais cela n'a guère d'importance, car cette contribution est évidemment nulle, la fonction étant nulle en tous ces points. En conclusion, l'intégrale de Lebesgue de la fonction de Dirichlet est nulle. Comme il y a infiniment plus de points d'abscisse irrationnelle (une infinité non dénombrable) sur le segment $[0, 1]$ que de points d'abscisse rationnelle, la valeur nulle de l'intégrale de Lebesgue correspond à ce que les physiciens et les probabilistes entendent par «moyenne».

LEBESGUE ET YOUNG

L'idée de Lebesgue de découper «en tranches» la fonction avait été émise presque simultanément par William Henry Young (1863-1942). Toutefois, comme l'indique Hardy, le développement de la théorie de l'intégration à la Lebesgue est l'œuvre de Lebesgue et nul ne penserait à diminuer sa gloire. Young reconnaît l'antériorité et la suprématie des travaux de Lebesgue, et l'expression *l'intégrale de Lebesgue* est sa dénomination : on ne saurait être plus galant.

Henri Lebesgue est né à Beauvais en 1875. Son père, employé dans une imprimerie était un bibliophile et avait accumulé un bon nombre de livres dont le jeune Henri fit son miel. Henri se retrouva orphelin alors qu'il était encore au lycée et il ne put étudier qu'à la faveur de bourses successives jusqu'à son entrée à l'École normale supérieure à l'âge de 19 ans. Il fut maître de conférences à Rennes jusqu'en 1906, chargé de cours puis professeur à l'Université de Poitiers et enfin professeur au Collège de France.

L'esprit critique de Henri Lebesgue se manifesta alors qu'il était étudiant, à propos des surfaces développables, comme le cylindre ou le cône, qui peuvent être aplanis ou «développés» sur un plan.

Dans la géométrie différentielle de l'époque, une surface développable devait avoir des régularités contraignantes, par exemple un plan tangent continu. Lebesgue démontra que ces conditions n'étaient pas nécessaires et pour convaincre ses condisciples de l'École normale, il froissait une feuille de papier de façon à obtenir une surface très irrégulière



René Baire

qui pouvait évidemment être développée sur un plan en enlevant tous les plis puisque la surface initiale de la feuille était plane. La preuve de Lebesgue, formalisée en 1899 dans *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*, avait scandalisé Darboux. Les «mandarins» allaient être également interloqués par sa définition de l'intégrale...

LA CLASSIFICATION DES FONCTIONS

Donc Lebesgue savait intégrer des fonctions «sauvages» à la Dirichlet et la question de la définition d'une «fonction» se reposait avec régularité. Lebesgue s'intéressa à la classification des fonctions donnée par René Baire en 1898. Dans la première catégorie de fonctions, selon Baire, étaient les fonctions continues, la classe C_0 . La limite de fonctions continues peut être discontinue, comme ne l'avait pas vu Cauchy. Les fonctions limites, pour chaque valeur de l'abscisse de fonctions continues, étaient classées par Baire dans la classe C_1 . Les fonctions limites des fonctions C_1 faisaient partie de la classe C_2 . Et ainsi de suite... Lebesgue montra l'existence de fonctions appartenant à chaque classe définie par Baire, et montra aussi qu'il existait des fonctions n'appartenant à aucune de ces classes : selon Lebesgue, la classification de Baire n'incluait pas toutes les fonctions de la variable réelle.

La généralité de la classification de Baire fut l'objet d'un conflit avec Lebesgue, qui n'était décidément pas d'un caractère très amène. Quant à Baire, sa neurasthénie en faisait une victime facile. Il se plaignait du fait que ses «idées ne prennent de l'importance que quand Lebesgue... y met le doigt».

PRIMITIVES ET DÉRIVÉES

Au début de sa *Note* Lebesgue traite de la généralisation de l'intégrale de Riemann dans une toute autre direction.

Dans le cas de fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche de fonctions «primitives» n'est donc pas résolu par l'intégration et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives.

La primitive d'une fonction f est une fonction P telle que sa dérivée P' est égale à f . Lebesgue affirme qu'une fonction f peut avoir une dérivée f' qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. Un exemple en est donné par le mathématicien italien Vito Volterra qui utilise un ensemble de Cantor.

En définitive, il y avait ainsi deux grandes idées dans la *Note* de Lebesgue.

La première était la partition de la fonction – et non de la variable – pour calculer la valeur de l'intégrale de la fonction dans un intervalle. Dès que l'on pense à cette partition de la fonction, la considération d'une mesure des «intervalles» des abscisses correspondant à ce découpage en découle naturellement.

La seconde est la définition de la mesure d'un ensemble et l'introduction des ensembles mesurables. Il existe néanmoins, montre Lebesgue, des ensembles non mesurables... mais la marge de ce texte est trop petite pour que nous puissions en détailler un exemple. Lebesgue a étendu la notion d'ensemble mesurable bien au-delà de ce que considérerait Borel, par exemple il considère que toute partie d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle (ce qu'il fallait prouver, car il existe des ensembles pathologiques de mesure 0).

Pourquoi Lebesgue n'enseigna jamais sa théorie de l'intégrale? Peut-être par modestie, peut-être parce que les exemples physiques (par exemple) comme le mouvement brownien où elle est indispensable n'existaient pas encore. Un roman c'est un théorème, disait Gide, et si les théorèmes étaient des romans? La définition de l'intégrale est une longue histoire qui connaîtra d'autres rebondissements avec les travaux de Radon, Daniell, Carathéodory, et surtout des probabilistes, au premier rang desquels Wiener et Kolmogorov.

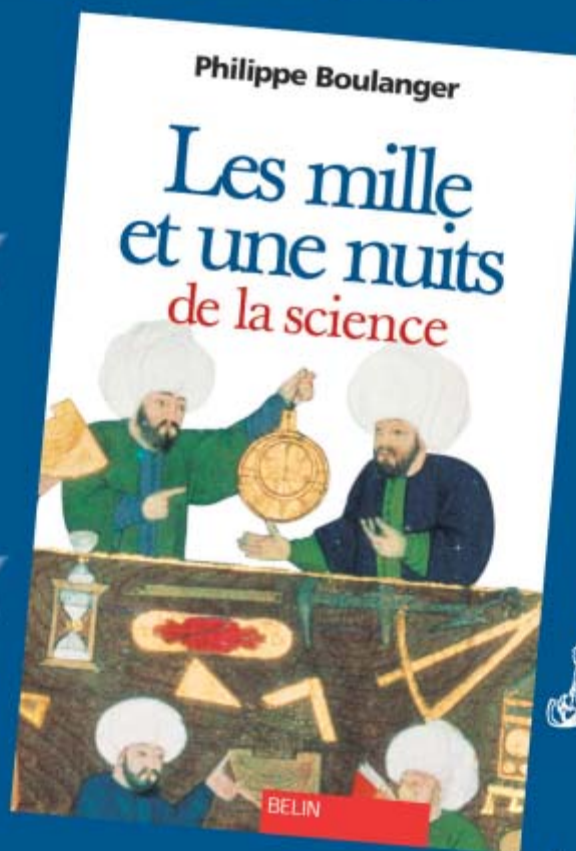
Nous remercions Jean-Pierre Kahane de l'aide précieuse apportée à la rédaction de cet article.

Tous les documents concernant la genèse de l'intégrale de Lebesgue sont contenus dans les cinq volumes des œuvres scientifiques de Lebesgue publiés par la revue de Genève *L'enseignement mathématique*, complétés par les *Lettres de Lebesgue à Borel* datées de mai 1901 à décembre 1914, publiées par Pierre Dugac et Bernard Bru dans les *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*.

La thèse de Pierre Dugac est un ensemble parfait traitant des *Fondements de l'analyse de Cauchy à Baire* (1978).

René Baire, *Œuvres scientifiques*, Bordas, 1990.

Entrez dans l'ambiance orientale
des mille et une nuits et laissez-vous
charmer par l'imagination
de Shéhérazade contant la science
et les tribulations des savants



«Dans ce livre, Philippe Boulanger, Directeur de la revue *Pour la Science*, réussit le tour de force de vulgariser des concepts difficiles en charmant son lecteur par une subtile danse... des neurones».

Hervé Ponchelet
Le Point

Code 002445 • 240 pages • Prix 100 F
Voir bon de commande p. 98



BELIN • POUR LA SCIENCE