

■ POUR LA SCIENCE

VOTRE ABONNEMENT 100 % NUMÉRIQUE

1 an au prix de 48 €

soit **4 € seulement par numéro** au lieu de ~~5,20 €~~

Pour consulter et télécharger
en toute liberté sur www.pourlascience.fr
les 12 prochains numéros
dès leur parution.



Oui, je m'abonne
à *Pour la Science* 100% numérique
1 an (12 numéros) pour 48 €

Je préfère découvrir toutes
les offres d'abonnement disponibles
en cliquant ici.



L'intégrale de Lebesgue a cent ans

ROBERT RYAN

Par un changement de perspective et inspiré par la nouvelle mesure de Borel, Henri Lebesgue définit une nouvelle intégrale qui correspond à l'intuition des probabilistes.

Henri Lebesgue (1875-1941) expose son «intégrale» dans une courte note des *Comptes Rendus des Séances de l'Académie* du 29 avril 1901. La note fera date : en moins de trois pages, les aspects essentiels d'une nouvelle définition de l'intégrale sont exposés. Nous allons relire «cette note sur l'intégrale de Lebesgue» en examinant ses différences avec les définitions antérieures des intégrales de Cauchy et de Riemann.

Pour des raisons qui tiennent à l'enseignement des mathématiques, les lemmes préliminaires, le symbolisme des définitions de limites et les précautions épistolaires des spécialistes de la rigueur, l'intégrale de Lebesgue a été le cauchemar de l'étudiant et, dans une mesure moindre, la plaie de l'enseignant qui avait quelques difficultés à intéresser son auditoire à un exposé où la forêt des définitions cachait l'arbre de l'idée. Pourtant les notions de base, dégagées de la gangue, sont compréhensibles et presque «naturelles», comme on dit...

L'INSPIRATION DE BOREL

Lebesgue a su tirer parti de la nouvelle théorie de la mesure décrite par Émile Borel (1871-1956) trois ans auparavant et qu'il généralisera. Il n'existe pas un type de mathématicien standard : Borel et Lebesgue étaient des tempéraments opposés. Borel vivait dans le siècle, aimant les honneurs et les engagements politiques : il sera député et, brièvement, ministre de la Marine dans le cabinet de Paul Painlevé. Lebesgue, mathématicien créatif, donc révolutionnaire, n'avait pas la vie privée correspondant à son statut de mathématicien hors ligne et ne fréquentait pas, comme Borel, les salons d'Anna de Noailles et des intellectuels de l'époque. Lebesgue, plus renfermé, se souciait peu de sa notoriété en dehors du domaine mathématique. Des échanges de lettres pendant la Première

guerre mondiale réveillèrent des querelles de paternité scientifique entre Borel et Lebesgue sur la définition des ensembles de mesure nulle...

DE LA LONGUEUR À LA MESURE

Comme il est de règle en mathématiques, l'idée de mesure correspond à une généralisation de l'idée de longueur, ou, à plusieurs dimensions, à celles d'aire, de volume, etc. Cette généralisation correspond à une question souvent posée par les enfants, quand on leur définit ce qu'est une aire ou une longueur, et qu'ils s'interrogent : comment déduire une valeur d'un ensemble de points que l'on ne peut compter, comment des ensembles de points peuvent-ils «mesurer» quelque chose ?

À un ensemble de points sur une droite, les mathématiciens associent une mesure qui a les propriétés d'une longueur : la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme de la mesure de ces ensembles.

Un ensemble de points est, selon Borel, de mesure nulle si l'on peut enfermer tous les points de l'ensemble dans des intervalles (en nombre fini ou infini) dont la somme est inférieure à tout petit nombre donné par avance. La mesure de l'ensemble vide est nulle, comme on doit s'y attendre. Toutefois la réciproque n'est pas vraie : un grand nombre d'ensembles ont pour mesure 0 et ne sont pas vides. Ainsi l'ensemble constitué par un point est de mesure 0, car on peut le recouvrir par un segment de longueur arbitrairement petite.

Dès que l'on a envisagé, après Cantor, les deux types d'infinis des points sur un segment de droite, les points d'abscisse rationnelle (infini dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numérotter) et les points d'abscisse non rationnelle (infini non dénombrable), la question pertinente était de s'interroger sur la «mesure» de ces différents ensembles.

Quelle est la mesure de l'ensemble de points d'abscisse rationnelle ? Comme l'ensemble des nombres rationnels n'est pas composé d'un ensemble fini d'intervalles, sa «longueur» n'est pas définie *stricto sensu*, mais sa mesure l'est.

Comme les nombres rationnels sont dénombrables, chaque nombre rationnel peut être recouvert par un des intervalles de longueur $1/8$, $1/16$, $1/32$... etc., la longueur totale de ces intervalles étant égale à $1/4$ (somme d'une série géométrique de raison 2). Donc tous les rationnels sont inclus dans une somme infinie d'intervalles de longueur $1/4$. Mais les nombres rationnels sur $[0;1]$ pourraient aussi être recouverts par une série d'intervalles de longueur $1/16$, $1/32$, $1/64$... etc., et donc par un segment de longueur $1/8$. En utilisant des séries d'intervalles de longueur de plus en plus petite, la longueur des segments recouvrant l'ensemble des rationnels est aussi petite que l'on veut. Donc l'ensemble des rationnels est de mesure nulle. Bien entendu,

