



L'intégrale de Lebesgue a cent ans

ROBERT RYAN

Par un changement de perspective et inspiré par la nouvelle mesure de Borel, Henri Lebesgue définit une nouvelle intégrale qui correspond à l'intuition des probabilistes.

Henri Lebesgue (1875-1941) expose son «intégrale» dans une courte note des *Comptes Rendus des Séances de l'Académie* du 29 avril 1901. La note fera date : en moins de trois pages, les aspects essentiels d'une nouvelle définition de l'intégrale sont exposés. Nous allons relire «cette note sur l'intégrale de Lebesgue» en examinant ses différences avec les définitions antérieures des intégrales de Cauchy et de Riemann.

Pour des raisons qui tiennent à l'enseignement des mathématiques, les lemmes préliminaires, le symbolisme des définitions de limites et les précautions épistolaires des spécialistes de la rigueur, l'intégrale de Lebesgue a été le cauchemar de l'étudiant et, dans une mesure moindre, la plaie de l'enseignant qui avait quelques difficultés à intéresser son auditoire à un exposé où la forêt des définitions cachait l'arbre de l'idée. Pourtant les notions de base, dégagées de la gangue, sont compréhensibles et presque «naturelles», comme on dit...

L'INSPIRATION DE BOREL

Lebesgue a su tirer parti de la nouvelle théorie de la mesure décrite par Émile Borel (1871-1956) trois ans auparavant et qu'il généralisera. Il n'existe pas un type de mathématicien standard : Borel et Lebesgue étaient des tempéraments opposés. Borel vivait dans le siècle, aimant les honneurs et les engagements politiques : il sera député et, brièvement, ministre de la Marine dans le cabinet de Paul Painlevé. Lebesgue, mathématicien créatif, donc révolutionnaire, n'avait pas la vie privée correspondant à son statut de mathématicien hors ligne et ne fréquentait pas, comme Borel, les salons d'Anna de Noailles et des intellectuels de l'époque. Lebesgue, plus renfermé, se souciait peu de sa notoriété en dehors du domaine mathématique. Des échanges de lettres pendant la Première

guerre mondiale réveillèrent des querelles de paternité scientifique entre Borel et Lebesgue sur la définition des ensembles de mesure nulle...

DE LA LONGUEUR À LA MESURE

Comme il est de règle en mathématiques, l'idée de mesure correspond à une généralisation de l'idée de longueur, ou, à plusieurs dimensions, à celles d'aire, de volume, etc. Cette généralisation correspond à une question souvent posée par les enfants, quand on leur définit ce qu'est une aire ou une longueur, et qu'ils s'interrogent : comment déduire une valeur d'un ensemble de points que l'on ne peut compter, comment des ensembles de points peuvent-ils «mesurer» quelque chose ?

À un ensemble de points sur une droite, les mathématiciens associent une mesure qui a les propriétés d'une longueur : la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme de la mesure de ces ensembles.

Un ensemble de points est, selon Borel, de mesure nulle si l'on peut enfermer tous les points de l'ensemble dans des intervalles (en nombre fini ou infini) dont la somme est inférieure à tout petit nombre donné par avance. La mesure de l'ensemble vide est nulle, comme on doit s'y attendre. Toutefois la réciproque n'est pas vraie : un grand nombre d'ensembles ont pour mesure 0 et ne sont pas vides. Ainsi l'ensemble constitué par un point est de mesure 0, car on peut le recouvrir par un segment de longueur arbitrairement petite.

Dès que l'on a envisagé, après Cantor, les deux types d'infinis des points sur un segment de droite, les points d'abscisse rationnelle (infinité dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numérotter) et les points d'abscisse non rationnelle (infinité non dénombrable), la question pertinente était de s'interroger sur la «mesure» de ces différents ensembles.

Quelle est la mesure de l'ensemble de points d'abscisse rationnelle ? Comme l'ensemble des nombres rationnels n'est pas composé d'un ensemble fini d'intervalles, sa «longueur» n'est pas définie *stricto sensu*, mais sa mesure l'est.

Comme les nombres rationnels sont dénombrables, chaque nombre rationnel peut être recouvert par un des intervalles de longueur $1/8$, $1/16$, $1/32$... etc., la longueur totale de ces intervalles étant égale à $1/4$ (somme d'une série géométrique de raison 2). Donc tous les rationnels sont inclus dans une somme infinie d'intervalles de longueur $1/4$. Mais les nombres rationnels sur $[0;1]$ pourraient aussi être recouverts par une série d'intervalles de longueur $1/16$, $1/32$, $1/64$... etc., et donc par un segment de longueur $1/8$. En utilisant des séries d'intervalles de longueur de plus en plus petite, la longueur des segments recouvrant l'ensemble des rationnels est aussi petite que l'on veut. Donc l'ensemble des rationnels est de mesure nulle. Bien entendu,



quand il s'agit de traiter de l'infini, il faut prendre des précautions mathématiques, ce qu'a fait Borel.

La mesure de Borel est une extension à des ensembles plus généraux que des segments : elle « mesure » ces ensembles et garde le principe d'additivité mentionné précédemment, c'est-à-dire que la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme des mesures de ces ensembles. Cette idée de Borel aidera Lebesgue à définir son intégrale : dans une intégrale, il est deux quantités qui jouent un rôle prépondérant, la mesure de l'intervalle de variation de la fonction et les valeurs de la fonction sur cet « intervalle ».

LE PROBLÈME DE LA FONCTION DE DIRICHLET

Lebesgue voulait intégrer des « fonctions » plus sauvages que les fonctions habituelles (les fonctions continues que l'on peut dessiner sans lever le crayon). Parmi les fonctions discontinues, l'une des plus pathologiques (à l'époque) est la fonction inventée par le mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) : cette fonction, définie sur le segment $[0,1]$, vaut 1 en tous points d'abscisse irrationnelle et 0 sur tous les points d'abscisse rationnelle de l'intervalle $[0,1]$. Pour cet exposé, nous examinerons une autre fonction de Dirichlet, égale à 1 sur les rationnels et à 0 sur les irrationnels.

Cette fonction est impossible à dessiner puisque, dans chaque intervalle, aussi petit soit-il, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité plus grande encore de points d'abscisse irrationnelle. Fontenelle écrivait en 1727, dans la préface à ses *Éléments de la*

Lejeune Dirichlet

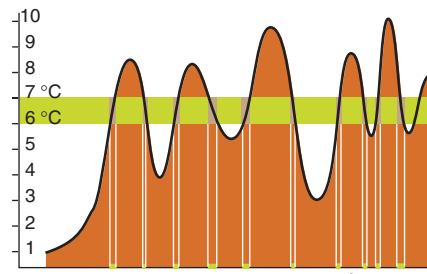


géométrie de l'infini, que les nombres irrationnels « se trouvent en une quantité sans comparaison plus grande que les nombres rationnels ». L'intuition probabiliste nous incite à penser que si l'on prend au hasard un point sur le segment $[0,1]$, sa valeur sera irrationnelle et que la valeur de la fonction considérée sera 0 « en moyenne ».

LES INTÉGRALES DE CAUCHY ET DE RIEMANN

L'intégrale de Riemann (1826-1866) est une généralisation de l'intégrale de Cauchy (1789-1857) publiée en 1823 dans le *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Le problème initial est de calculer l'aire située sous une courbe définie par une fonction $f(x)$. Cauchy remplace l'aire située sous la courbe de $f(x)$ par la somme des aires de rectangles jointifs. La base de chacun de ces rectangles (un intervalle) est une portion du segment $[a,b]$ et la hauteur est égale à la valeur de la fonction au « début » du segment. Cauchy montre (1) que la valeur de l'aire des rectangles additionnés est égale à celle sous la courbe continue quand la longueur de la plus grande base des rectangles tend vers zéro, et (2) que cette valeur limite ne dépend pas du découpage en rectangles.

Cauchy « montre » plus qu'il ne démontre, car il suppose implicitement que la fonction *est* uniformément continue. Cauchy ne sait pas intégrer des fonctions qui sont discontinues en un nombre infini de points, c'est-à-dire qui bondissent en



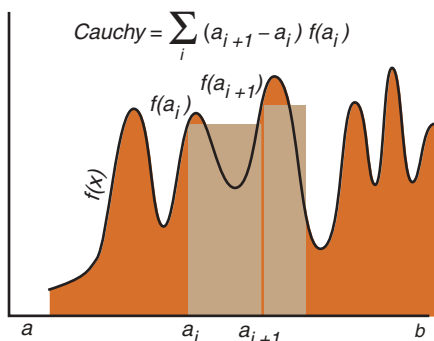
TEMPS PENDANT LEQUEL LA TEMPÉRATURE EST COMPRISE ENTRE 6 °C ET 7 °C

La température à midi durant le mois de février 1998 a varié entre 1 et 10 °C. Cherchons les intervalles de temps où la température est comprise entre 6 et 7 °C. Pour ce faire, nous coupons la courbe des températures par deux parallèles de valeurs 6 et 7 °C et reporterons les valeurs du temps correspondant à cet intervalle de température. La somme des durées pour lesquelles la température est comprise entre ces limites est égale à λ_6 . Puis nous continuerons pour d'autres découpages, de 6 à 7 °C, de 7 à 8 °C et ainsi de suite... La moyenne de la température avec ce découpage sera $1\lambda_1 + \dots + 6\lambda_6 + 7\lambda_7 + \dots + 9\lambda_9$, divisée par la somme des λ_i . Nous pouvons prendre des intervalles de températures de plus en plus petits et finalement, par un passage à la limite, nous retrouvons la définition de l'intégrale de Lebesgue.

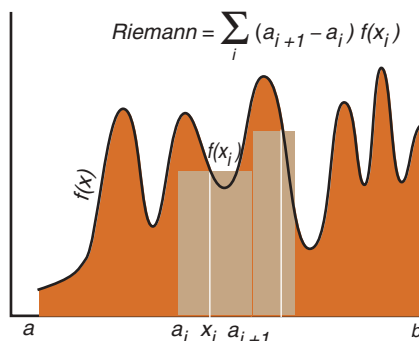
chaque point d'une valeur u à une valeur v .

La définition de l'intégrale par Riemann est une variation subtile de l'intégrale de Cauchy. Riemann prend pour hauteur du rectangle défini sur un intervalle, non plus la valeur du début de l'intervalle, mais une valeur de la fonction quelconque à l'intérieur de chaque intervalle. Quand on fait tendre la valeur maximale des intervalles vers zéro, et que la limite de la somme ne dépend ni du découpage en intervalles ni de la valeur des hauteurs, l'intégrale de Riemann existe. Il est patent que la valeur

Gaston Darboux



Dans l'intégrale de Cauchy, on prend une succession d'abscisses a_i prises entre les deux points du domaine de définition de la variable, et, à chaque valeur de a_i , on associe la valeur de la fonction $f(a_i)$. La valeur de l'intégrale entre a et b est égale à la somme $\sum (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ quand les longueurs des intervalles $a_{i+1} - a_i$ tendent vers zéro. Dans l'intégrale de Riemann $\sum (a_{i+1} - a_i) f(x_i)$, on prend pour valeur de la



fonction une valeur x_i comprise entre a_i et a_{i+1} . L'intégrale de Lebesgue consiste à découper la fonction en tranches horizontales entre deux valeurs m_i et m_{i+1} , à multiplier la différence par la mesure λ_i de l'intervalle sur l'axe des abscisses correspondant à ces deux valeurs et à sommer toutes les valeurs quand l'intervalle $m_{i+1} - m_i$ tend vers zéro, soit $\sum (m_{i+1} - m_i) \lambda_i$.

