

quand il s'agit de traiter de l'infini, il faut prendre des précautions mathématiques, ce qu'a fait Borel.

La mesure de Borel est une extension à des ensembles plus généraux que des segments : elle « mesure » ces ensembles et garde le principe d'additivité mentionné précédemment, c'est-à-dire que la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme des mesures de ces ensembles. Cette idée de Borel aidera Lebesgue à définir son intégrale : dans une intégrale, il est deux quantités qui jouent un rôle prépondérant, la mesure de l'intervalle de variation de la fonction et les valeurs de la fonction sur cet « intervalle ».



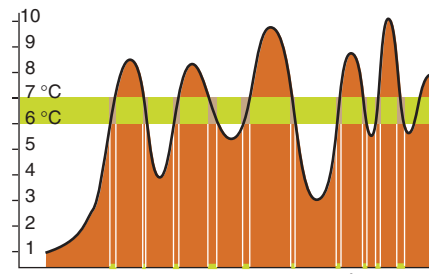
Lejeune Dirichlet

géométrie de l'infini, que les nombres irrationnels « se trouvent en une quantité sans comparaison plus grande que les nombres rationnels ». L'intuition probabiliste nous incite à penser que si l'on prend au hasard un point sur le segment $[0,1]$, sa valeur sera irrationnelle et que la valeur de la fonction considérée sera 0 « en moyenne ».

LES INTÉGRALES DE CAUCHY ET DE RIEMANN

L'intégrale de Riemann (1826-1866) est une généralisation de l'intégrale de Cauchy (1789-1857) publiée en 1823 dans le *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Le problème initial est de calculer l'aire située sous une courbe définie par une fonction $f(x)$. Cauchy remplace l'aire située sous la courbe de $f(x)$ par la somme des aires de rectangles jointifs. La base de chacun de ces rectangles (un intervalle) est une portion du segment $[a,b]$ et la hauteur est égale à la valeur de la fonction au « début » du segment. Cauchy montre (1) que la valeur de l'aire des rectangles additionnés est égale à celle sous la courbe continue quand la longueur de la plus grande base des rectangles tend vers zéro, et (2) que cette valeur limite ne dépend pas du découpage en rectangles.

Cauchy « montre » plus qu'il ne démontre, car il suppose implicitement que la fonction *est* uniformément continue. Cauchy ne sait pas intégrer des fonctions qui sont discontinues en un nombre infini de points, c'est-à-dire qui bondissent en



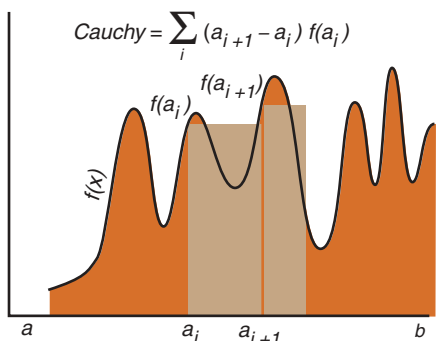
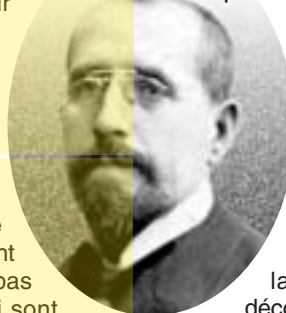
TEMPS PENDANT LEQUEL LA TEMPÉRATURE EST COMPRISE ENTRE 6 °C ET 7 °C

La température à midi durant le mois de février 1998 a varié entre 1 et 10 °C. Cherchons les intervalles de temps où la température est comprise entre 6 et 7 °C. Pour ce faire, nous coupons la courbe des températures par deux parallèles de valeurs 6 et 7 °C et reporterons les valeurs du temps correspondant à cet intervalle de température. La somme des durées pour lesquelles la température est comprise entre ces limites est égale à λ_6 . Puis nous continuerons pour d'autres découpages, de 6 à 7 °C, de 7 à 8 °C et ainsi de suite... La moyenne de la température avec ce découpage sera $1\lambda_1 + \dots + 6\lambda_6 + 7\lambda_7 + \dots + 9\lambda_9$, divisée par la somme des λ_i . Nous pouvons prendre des intervalles de températures de plus en plus petits et finalement, par un passage à la limite, nous retrouvons la définition de l'intégrale de Lebesgue.

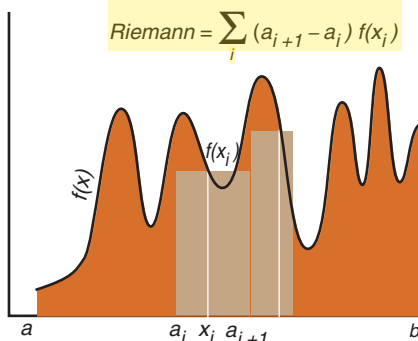
chaque point d'une valeur u à une valeur v .

La définition de l'intégrale par Riemann est une variation subtile de l'intégrale de Cauchy. Riemann prend pour hauteur du rectangle défini sur un intervalle, non plus la valeur du début de l'intervalle, mais une valeur de la fonction quelconque à l'intérieur de chaque intervalle. Quand on fait tendre la valeur maximale des intervalles vers zéro, et que la limite de la somme ne dépend ni du découpage en intervalles ni de la valeur des hauteurs, l'intégrale de Riemann existe. Il est patent que la valeur

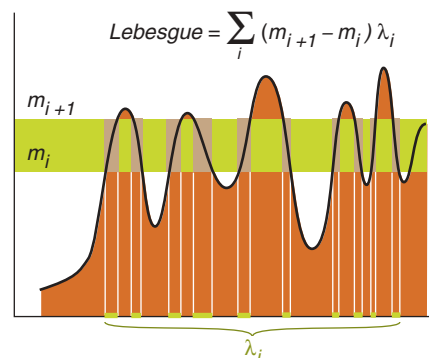
Gaston Darboux



$$\text{Cauchy} = \sum_i (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$$



$$\text{Riemann} = \sum_i (a_{i+1} - a_i) f(x_i)$$



$$\text{Lebesgue} = \sum_i (m_{i+1} - m_i) \lambda_i$$

Dans l'intégrale de Cauchy, on prend une succession d'abscisses a_i prises entre les deux points du domaine de définition de la variable, et, à chaque valeur de a_i , on associe la valeur de la fonction $f(a_i)$. La valeur de l'intégrale entre a et b est égale à la somme $\sum (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ quand les longueurs des intervalles $a_{i+1} - a_i$ tendent vers zéro. Dans l'intégrale de Riemann $\sum (a_{i+1} - a_i) f(x_i)$, on prend pour valeur de la

fonction une valeur x_i comprise entre a_i et a_{i+1} . L'intégrale de Lebesgue consiste à découper la fonction en tranches horizontales entre deux valeurs m_i et m_{i+1} , à multiplier la différence par la mesure λ_i de l'intervalle sur l'axe des abscisses correspondant à ces deux valeurs et à sommer toutes les valeurs quand l'intervalle $m_{i+1} - m_i$ tend vers zéro, soit $\sum (m_{i+1} - m_i) \lambda_i$.