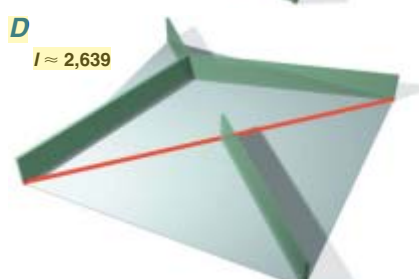
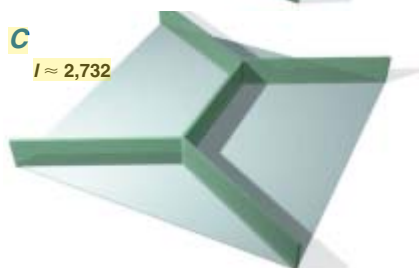
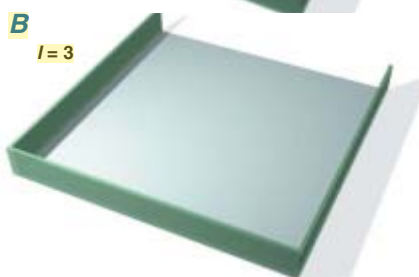
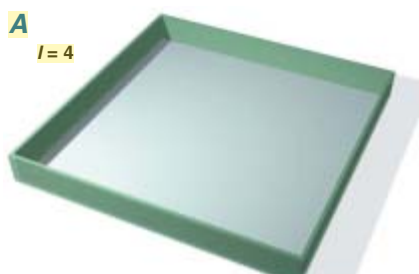




# Obstruction de polygones

IAN STEWART

**Ou comment empêcher un rayon lumineux de traverser un terrain devient vite un problème mathématique ardu.**



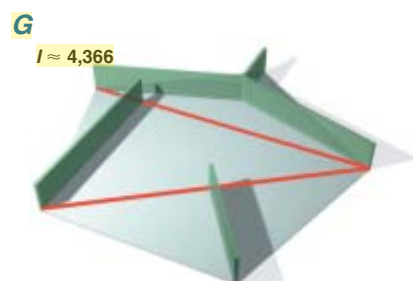
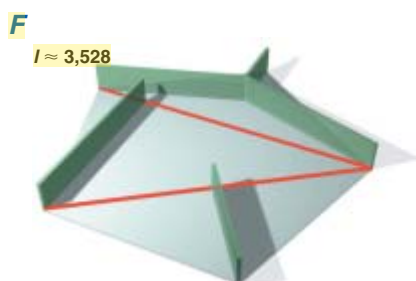
La géométrie combinatoire est un domaine des mathématiques qui fourmille de problèmes simples sans pourtant avoir de solutions connues. Elle consiste à trouver des arrangements de droites, de courbes ou d'autres formes géométriques qui obéissent à des contraintes données. Ce mois-ci, je me consacrerai à la question dite du Problème du carré opaque et à plusieurs variations du même problème. Bernd Kawohl, de l'Université de Cologne, en Allemagne, a attiré mon attention sur ce problème et l'un de ses articles m'a inspiré ces pages.

Supposez que vous travaillez au contre-espionnage de votre pays et vous savez que, dans quelques jours, deux espions situés de part et d'autre du terrain de l'ambassade de votre pays tenteront de communiquer par signaux lumineux. Supposons ce terrain carré, de un kilomètre de côté. Pour empêcher des secrets de passer à l'ennemi, vous décidez de construire une clôture opaque qui interceptera tout rayon lumineux qui traverserait le jardin de l'ambassade. De plus, les finances de votre service sont au plus bas, et vous souhaitez la clôture la plus courte possible. Quelle forme lui donner? Elle peut être aussi compliquée que vous le voulez, formée de plusieurs parties rectilignes ou courbes.

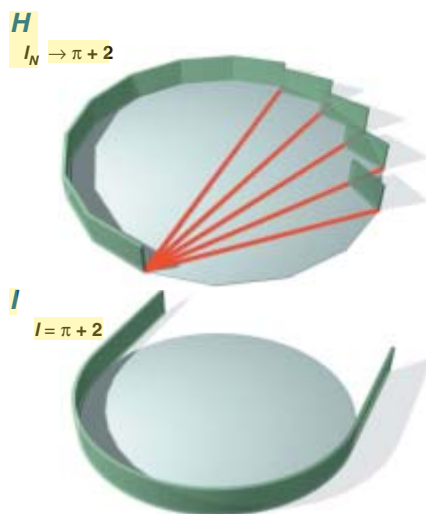
Votre première idée, la plus simple, est de clôturer le pourtour du carré, soit de construire une clôture de quatre kilomètres (voir la figure 1A). Puis, une courte réflexion vous inspire une amélioration : la suppression d'un des côtés du carré ; il reste alors une clôture en U (voir la figure 1B) de trois kilomètres de longueur. Il s'agit de la plus courte clôture qui suit une courbe simple, sans rupture et sans ramification, polygonale ou non. En effet, une telle clôture doit contenir les quatre sommets du carré.

Cependant, vous pouvez encore faire plus court avec des clôtures toujours d'un seul tenant, mais ramifiées. La figure 1C illustre une clôture de  $(1 + \sqrt{3})$  kilomètres, soit environ 2,732 kilomètres. Tous les angles mesurent 120 degrés. De tels motifs sont nommés arbres de Steiner : les angles de 120 degrés en minimisent la longueur. C'est la courbe d'un seul tenant la plus courte possible.

Pouvez-vous faire mieux? Oui, si vous acceptez des clôtures en plusieurs parties : la clôture la plus courte mesure environ 2,639 kilomètres (voir la figure 1D). Les trois segments de la partie supérieure forment trois angles à 120 degrés. Cependant, vous ne pourrez pas démontrer ce résultat au trésorier du service, car une telle démonstration reste à faire.



1. Les clôtures opaques d'une figure sont des barrières qui empêchent toute droite de traverser cette figure. Pour un carré, une clôture qui suit le périmètre (A) ou seulement trois des côtés (B) est opaque. Un arbre de Steiner (C) ou une clôture en deux parties (D) le sont aussi, mais sont plus courts. La clôture minimale pour un triangle équilatéral est aussi un arbre de Steiner (E). Les clôtures opaques que l'on pense être minimales pour un pentagone régulier (F) ou un hexagone (G) sont constituées de trois morceaux. Dans ces figures où l'on suppose les longueurs des côtés égales à un, toutes les longueurs (l) autres que celles qui correspondent à (A) et à (B) sont approximatives.



**2. Un polygone régulier ayant un nombre pair et élevé de côtés a une clôture opaque constituée de plusieurs éléments (H). Quand le nombre N de côtés du polygone croît, la longueur  $I_N$  de cette clôture s'approche de celle de la clôture opaque minimale d'un cercle (I), soit un demi-cercle prolongé de deux rayons.**

Plus encore, les mathématiciens ignorent s'il existe une clôture opaque encore plus courte. Peut-être est-il possible de raccourcir indéfiniment ces clôtures en les compliquant à volonté. On a prouvé l'existence d'une clôture minimale pour un nombre donné de constituants. On ignore encore si la longueur minimale d'une clôture continue à décroître lorsque le nombre de constituants tend vers l'infini. Ou encore, si une clôture qui a une infinité de composants peut être plus courte que toutes celles qui ont un nombre fini d'éléments. Tout cela semble peu vraisemblable, mais personne n'a encore prouvé que c'est impossible.

B. Kawohl a prouvé que la clôture illustrée sur la figure 1D est la plus courte de celles à deux éléments. Il a montré qu'un composant doit relier trois des sommets du carré et que l'autre doit contenir le quatrième. Le premier composant doit alors être l'arbre de Steiner le plus court joignant trois sommets. La plus petite région convexe qui contient ce morceau de clôture, c'est-à-dire la partie protégée du terrain, est un demi-carré limité par une diagonale. Le second élément doit être la plus courte courbe qui joint ce triangle au quatrième sommet, soit le segment de diagonale entre ce sommet et le centre du carré.

Vous avez convaincu votre supérieur et vos services sont requis pour d'autres ambassades. Comment faire pour d'autres formes de terrain ? Quand le terrain est un triangle équilatéral, la clôture opaque la plus courte est l'arbre de Steiner composé de trois segments qui relient chaque sommet au centre (voir la figure 1E). Pour un pentagone régulier, la clôture opaque la plus courte la plus souvent proposée a

trois éléments (voir la figure 1F). L'un d'eux est un arbre de Steiner qui relie trois sommets consécutifs du pentagone. Un autre est le plus court segment de droite qui relie le quatrième sommet à la région protégée par l'arbre de Steiner précédent. Enfin, le dernier élément est le plus court segment qui joint le cinquième sommet à la région protégée par les deux précédents. Personne n'a prouvé que cette clôture est optimale, mais on n'en connaît pas de plus courte.

## CLÔTURES ET TRANCHÉES

Nouveau défi pour vos talents d'architecte : l'hexagone (voir la figure 1F). Puisque les angles d'un hexagone sont égaux à 120 degrés, l'arbre de Steiner est composé de trois côtés consécutifs qui relient quatre sommets consécutifs. Le deuxième composant est le plus court chemin du cinquième sommet à la région protégée par l'arbre de Steiner, et le troisième, le plus court chemin du dernier sommet à la région protégée par les autres éléments. De nouveau, on ignore si cette clôture est la plus courte.

Par analogie, vous pouvez clôturer tout polygone régulier convexe dont le nombre de côtés est pair (voir la figure 2H). Après la division du polygone en deux par un diamètre, le premier élément de la clôture est formé des côtés du polygone inscrit dans ce demi-cercle. Le deuxième élément est le plus court chemin qui joint le sommet suivant à la région protégée par le premier constituant, le troisième est le plus court chemin entre le sommet suivant et la région des deux précédents, et ainsi de suite...

Puisqu'un polygone régulier qui a un grand nombre de côtés est proche d'un cercle, quelle est la plus courte clôture opaque d'un terrain circulaire ? Pour simplifier, supposons que le rayon de ce terrain circulaire soit égal à un kilomètre. L'idée la plus simple est une clôture qui suit la circonférence du cercle, soit  $2\pi$  (environ 6,283) kilomètres. Vous pouvez faire mieux en érigeant une partie de la

clôture à l'extérieur du terrain : une demi-circonférence prolongée à chaque extrémité par une partie de tangente égale au rayon (voir la figure 2I). La forme en U obtenue est bien une clôture opaque pour le cercle, et sa longueur est égale à  $\pi + 2$  (environ 5,142) kilomètres.

On peut prouver que ce motif est bien de longueur minimale parmi les clôtures opaques d'un cercle qui sont des courbes simples (d'un seul tenant et sans ramification). Pour ce faire, énonçons le problème en termes de tranchées plutôt que de clôtures. Imaginons qu'un tuyau souterrain rectiligne passe à un kilomètre d'un point donné. Quelle est la tranchée la plus courte qui rencontrera à coup sûr le tuyau ? Nous savons que ce dernier rencontrera tangentiellement le cercle centré au point donné et d'un rayon de un kilomètre, et donc aussi toute clôture opaque de ce cercle. Dès lors, il suffit de tracer une tranchée qui a la forme d'une clôture opaque de ce cercle.

Dans cette version terrassière du problème, il est normal d'accepter que les tranchées sortent du terrain, mais les clôtures sont généralement érigées par un propriétaire sur sa propriété plutôt que chez le voisin. B. Kawohl montre que la clôture opaque minimale tout entière située à l'intérieur du cercle ne saurait mesurer plus de  $(\pi + 2)$  kilomètres de longueur. Il obtient ce résultat en utilisant la clôture d'un polygone dont le nombre de sommets est pair et très grand (qui s'approche alors d'un cercle). Un calcul trigonométrique montre que la longueur de la clôture de la figure H tend vers  $\pi + 2$  kilomètres lorsque le nombre de côtés tend vers l'infini.

Ces clôtures sont-elles vraiment minimales ? Peut-on en trouver de plus courtes ? Et que dire d'autres formes, tels des polygones irréguliers, convexes ou non, des ellipses, des demi-cercles ? Que se passe-t-il à trois dimensions, avec des murs opaques créés pour un cube ou pour une sphère ? La protection des secrets d'État est source de problèmes pour les mathématiciens des jeux.

## Réactions

Plusieurs lecteurs ont critiqué un calcul exposé dans l'article *Un guide fractal du jeu de ticktacktoe* (voir *Pour la Science*, octobre 2000). J'indiquais que le nombre de parties possibles au morpion est 362 880. J'aurais dû préciser que ce calcul tient compte de l'hypothèse selon laquelle le jeu continue jusqu'à ce que toutes les cases de la grille soient remplies plutôt que de s'arrêter dès que l'un des joueurs gagne. Le nombre total de séquences qui remplissent toute la grille est  $9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 3 \times 2$  (noté 9!), soit bien 362 880.

Quel est le nombre de jeux réels ? John Stewart, de l'Université de Rockedge, indique que ce nombre est donné par :

$$9! - 24M - 6N - 2P - Q + (M + N + P + Q),$$

où M, N, P et Q sont les nombres de jeux terminés après le cinquième, sixième, septième et huitième mouvements. Leurs valeurs exactes restent à calculer. À vos calculatrices ! Selon J. Stewart, ce nombre serait 1440.