



IAN STEWART

Les dessins sont de Bryan Christie

© POUR LA SCIENCE - N° 284 JUIN 2001

1, 2 et 4 se disputent, 6 est l'unique saut champion pour des nombres très grands. Toutefois, une propriété vérifiée pour des milliards d'entiers peut ne plus l'être pour d'autres. La surprise est là !

Les mathématiciens ont proposé un argument convaincant selon lequel, aux environs de $x = 1,7427 \times 10^{35}$, le titre de champion passe de 6 à 30. Ce titre échoirait à 210 pour x supérieur à 10^{425} .

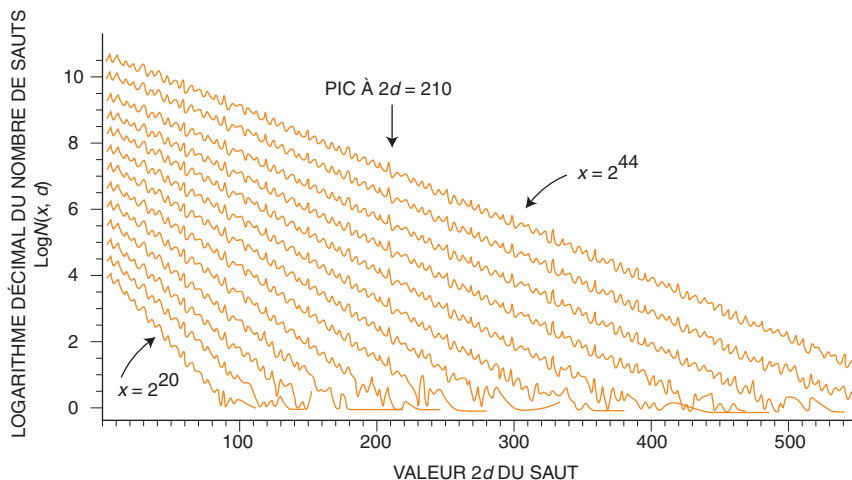
LA CONJECTURE DES NOMBRES PRIMORIAUX

À l'exception de 4, les factorisations des champions conjecturés s'inscrivent dans une élégante structure : $2 = 2$, $6 = 2 \times 3$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Chacun d'eux est obtenu par la multiplication des premiers nombres premiers consécutifs. Ces nombres sont dits primoriaux – un mot valise entre *premier* et *factoriel* – et les suivants sont 2 310, 30 030 et 510 510. Dans leur article, A. Odlyzko et ses coauteurs proposent la conjecture des sauts champions : ce sont 4 et les nombres primoriaux.

Comment sont-ils parvenus à cette hypothèse ? Un examen de la suite des nombres premiers révèle que, parfois, deux d'entre eux sont des entiers impairs consécutifs, tels, par exemple, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19... La *Conjecture des nombres premiers jumeaux* énonce qu'il y a une infinité de tels couples. Elle est fondée sur la distribution aléatoire des nombres premiers au sein des nombres entiers impairs, avec une probabilité issue du *Théorème de répartition*. Cette hypothèse semble un non-sens – un entier est premier ou non, sans qu'il soit question de probabilité –, cependant, dans ce problème, il s'agit d'un non-sens raisonnable : la probabilité d'avoir un ensemble fini de nombres premiers jumeaux est nulle.

Trois nombres impairs consécutifs peuvent-ils être premiers ? Il n'y a qu'un seul exemple (3, 5, 7), car dans trois nombres impairs consécutifs, l'un d'entre eux est un multiple de trois. S'il est premier, c'est donc 3. Un tel argument ne s'applique pas aux triplets p , $p+2$, $p+6$ ou p , $p+4$, $p+6$ qui sont fréquents. Par exemple, 11, 13, 17 ou 41, 43, 47 sont du premier type et 7, 11, 13 ou 37, 41, 43 du second.

Dans les années 1920, les mathématiciens britanniques Godfrey Hardy et John Littlewood ont analysé les structures de ce type avec un grand nombre de nombres premiers. Avec un calcul de probabilités similaire à celui des nombres premiers jumeaux, ils ont établi une formule précise pour le nombre de suites de nombres premiers dotés d'une structure donnée de sauts. Cette formule est complexe, aussi ne la donnerais-je pas



2. Ce diagramme indique en fonction de x la fréquence des écarts entre deux nombres premiers consécutifs. Pour la première courbe, on a étudié les nombres premiers inférieurs à 2^{20} , puis on a calculé le nombre de fois où l'écart entre deux nombres premiers consécutifs était 2, puis 4, puis 6... Les courbes suivantes sont construites de la même façon pour $x = 2^{22}$, $x = 2^{24}$ jusqu'à $x = 2^{44}$. À mesure que x croît, un pic apparaît pour un écart $2d$ égal à 210. Il est conjecturé que ce pic finit par dépasser l'ordonnée du point de départ, c'est-à-dire que pour une certaine valeur (élevée) de x , l'écart le plus fréquent est 210.

ici ; vous la trouverez dans l'article cité précédemment.

Du travail de Hardy et Littlewood, A. Odlyzko et ses collègues ont déduit une formule pour $N(x, d)$, le nombre de sauts de valeur $2d$ entre des nombres premiers consécutifs inférieurs à x (nous préférons $2d$ à d pour signifier que les sauts sont pairs). Cette formule n'est estimée valide que lorsque $2d$ est grand et x bien plus grand encore. La figure 2 montre comment $\log N(x, d)$ varie selon $2d$ pour 13 valeurs de x de 2^{20} à 2^{44} (log désigne le logarithme en base 10). Chaque graphe est approximativement linéaire avec un très grand nombre de pics. L'un d'eux est particulièrement marqué, à $2d = 210$, le saut champion conjecturé pour x très grand (il serait encore plus marqué s'il n'était pas « écrasé » par le logarithme). Ce type de résultat indique que la formule de $N(x, d)$ est proche de la réalité.

Quand $2d$ s'approche de la valeur du saut champion, $N(x, d)$ est nécessairement très grand. La meilleure situa-

tion qui s'accorde avec cette idée est lorsque $2d$ a de nombreux facteurs premiers distincts. De plus, $2d$ doit être aussi petit que possible, aussi, les choix les plus plausibles pour $2d$ sont-ils les primoriaux. Le saut champion 4 est vraisemblablement une exception. Par ailleurs, il apparaît à des tailles pour lesquelles la formule $N(x, d)$ n'est pas une bonne approximation. La formule donne le résultat lorsqu'un primordial donné prend le dessus sur le précédent comme nouveau saut champion.

Que reste-t-il à faire pour les mathématiciens ? Prouver la conjecture des sauts champions, bien sûr – ou la réfuter. Si vous n'envisagez ni l'un ni l'autre, essayez de trouver d'autres propriétés des sauts champions entre des nombres premiers successifs. Par exemple, quel est le saut le moins fréquent entre les nombres premiers consécutifs inférieurs à x ? Quel saut apparaît le plus proche du nombre moyen de fois ? Pour ce que j'en sais, ces questions restent ouvertes, et ce, même pour de petites valeurs de x .

Réactions

Dans mon récent article *Paradoxes perdus et retrouvés* (voir *Pour la science*, août 2000), j'indiquais que le paradoxe du contrôle surprise résulte d'une interprétation déraisonnable du mot surprise et, qu'en définitive, ce n'est pas un paradoxe du tout.

Plusieurs lecteurs ont attiré mon attention sur un article intitulé *Surprise maximization* dans *American Mathematical Monthly* (vol. 107, n° 6, juin-juillet 2000). Les auteurs définissent une mesure de la surprise et examinent quelle stratégie doit adopter le professeur pour maximiser la surprise des étudiants. Leur conclusion est que pour choisir le jour de la semaine, il doit utiliser une distribution de probabilité qui reste quasi constante au début de la semaine pour croître rapidement sur la fin. Selon cette stratégie, il choisira plus souvent le vendredi.