

1, 2 et 4 se disputent, 6 est l'unique saut champion pour des nombres très grands. Toutefois, une propriété vérifiée pour des milliards d'entiers peut ne plus l'être pour d'autres. La surprise est là !

Les mathématiciens ont proposé un argument convaincant selon lequel, aux environs de $x = 1,7427 \times 10^{35}$, le titre de champion passe de 6 à 30. Ce titre échoirait à 210 pour x supérieur à 10^{425} .

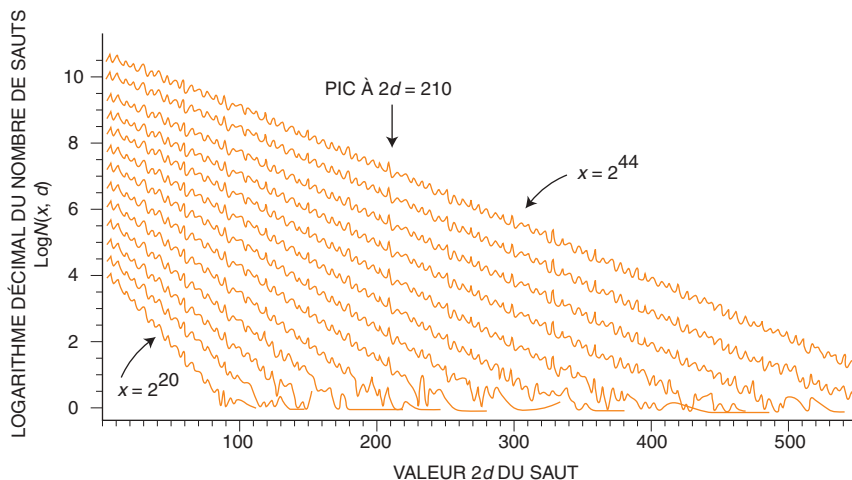
LA CONJECTURE DES NOMBRES PRIMORIAUX

À l'exception de 4, les factorisations des champions conjecturés s'inscrivent dans une élégante structure : $2 = 2$, $6 = 2 \times 3$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Chacun d'eux est obtenu par la multiplication des premiers nombres premiers consécutifs. Ces nombres sont dits primoriaux – un mot valise entre *premier* et *factoriel* – et les suivants sont 2 310, 30 030 et 510 510. Dans leur article, A. Odlyzko et ses coauteurs proposent la conjecture des sauts champions : ce sont 4 et les nombres primoriaux.

Comment sont-ils parvenus à cette hypothèse ? Un examen de la suite des nombres premiers révèle que, parfois, deux d'entre eux sont des entiers impairs consécutifs, tels, par exemple, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19... La *Conjecture des nombres premiers jumeaux* énonce qu'il y a une infinité de tels couples. Elle est fondée sur la distribution aléatoire des nombres premiers au sein des nombres entiers impairs, avec une probabilité issue du *Théorème de répartition*. Cette hypothèse semble un non-sens – un entier est premier ou non, sans qu'il soit question de probabilité –, cependant, dans ce problème, il s'agit d'un non-sens raisonnable : la probabilité d'avoir un ensemble fini de nombres premiers jumeaux est nulle.

Trois nombres impairs consécutifs peuvent-ils être premiers ? Il n'y a qu'un seul exemple (3, 5, 7), car dans trois nombres impairs consécutifs, l'un d'entre eux est un multiple de trois. S'il est premier, c'est donc 3. Un tel argument ne s'applique pas aux triplets p , $p+2$, $p+6$ ou p , $p+4$, $p+6$ qui sont fréquents. Par exemple, 11, 13, 17 ou 41, 43, 47 sont du premier type et 7, 11, 13 ou 37, 41, 43 du second.

Dans les années 1920, les mathématiciens britanniques Godfrey Hardy et John Littlewood ont analysé les structures de ce type avec un grand nombre de nombres premiers. Avec un calcul de probabilités similaire à celui des nombres premiers jumeaux, ils ont établi une formule précise pour le nombre de suites de nombres premiers dotés d'une structure donnée de sauts. Cette formule est complexe, aussi ne la donnerais-je pas



2. Ce diagramme indique en fonction de x la fréquence des écarts entre deux nombres premiers consécutifs. Pour la première courbe, on a étudié les nombres premiers inférieurs à 2^{20} , puis on a calculé le nombre de fois où l'écart entre deux nombres premiers consécutifs était 2, puis 4, puis 6... Les courbes suivantes sont construites de la même façon pour $x = 2^{22}$, $x = 2^{24}$ jusqu'à $x = 2^{44}$. À mesure que x croît, un pic apparaît pour un écart $2d$ égal à 210. Il est conjecturé que ce pic finit par dépasser l'ordonnée du point de départ, c'est-à-dire que pour une certaine valeur (élevée) de x , l'écart le plus fréquent est 210.

ici ; vous la trouverez dans l'article cité précédemment.

Du travail de Hardy et Littlewood, A. Odlyzko et ses collègues ont déduit une formule pour $N(x, d)$, le nombre de sauts de valeur $2d$ entre des nombres premiers consécutifs inférieurs à x (nous préférons $2d$ à d pour signifier que les sauts sont pairs). Cette formule n'est estimée valide que lorsque $2d$ est grand et x bien plus grand encore. La figure 2 montre comment $\log N(x, d)$ varie selon $2d$ pour 13 valeurs de x de 2^{20} à 2^{44} (log désigne le logarithme en base 10). Chaque graphe est approximativement linéaire avec un très grand nombre de pics. L'un d'eux est particulièrement marqué, à $2d = 210$, le saut champion conjecturé pour x très grand (il serait encore plus marqué s'il n'était pas « écrasé » par le logarithme). Ce type de résultat indique que la formule de $N(x, d)$ est proche de la réalité.

Quand $2d$ s'approche de la valeur du saut champion, $N(x, d)$ est nécessairement très grand. La meilleure situa-

tion qui s'accorde avec cette idée est lorsque $2d$ a de nombreux facteurs premiers distincts. De plus, $2d$ doit être aussi petit que possible, aussi, les choix les plus plausibles pour $2d$ sont-ils les primoriaux. Le saut champion 4 est vraisemblablement une exception. Par ailleurs, il apparaît à des tailles pour lesquelles la formule $N(x, d)$ n'est pas une bonne approximation. La formule donne le résultat lorsqu'un primordial donné prend le dessus sur le précédent comme nouveau saut champion.

Que reste-t-il à faire pour les mathématiciens ? Prouver la conjecture des sauts champions, bien sûr – ou la réfuter. Si vous n'envisagez ni l'un ni l'autre, essayez de trouver d'autres propriétés des sauts champions entre des nombres premiers successifs. Par exemple, quel est le saut le moins fréquent entre les nombres premiers consécutifs inférieurs à x ? Quel saut apparaît le plus proche du nombre moyen de fois ? Pour ce que j'en sais, ces questions restent ouvertes, et ce, même pour de petites valeurs de x .

Réactions

Dans mon récent article *Paradoxes perdus et retrouvés* (voir *Pour la science*, août 2000), j'indiquais que le paradoxe du contrôle surprise résulte d'une interprétation déraisonnable du mot surprise et, qu'en définitive, ce n'est pas un paradoxe du tout.

Plusieurs lecteurs ont attiré mon attention sur un article intitulé *Surprise maximization* dans *American Mathematical Monthly* (vol. 107, n° 6, juin-juillet 2000). Les auteurs définissent une mesure de la surprise et examinent quelle stratégie doit adopter le professeur pour maximiser la surprise des étudiants. Leur conclusion est que pour choisir le jour de la semaine, il doit utiliser une distribution de probabilité qui reste quasi constante au début de la semaine pour croître rapidement sur la fin. Selon cette stratégie, il choisira plus souvent le vendredi.



La poussée d'Archimède

ROLAND LEHOUCQ • JEAN-MICHEL COURTY

Formulée il y a plus de 2 200 ans, la loi d'Archimède est simple, mais ses applications sont souvent plus subtiles qu'il n'y paraît.

Hiéron, roi de Syracuse (–265 à –215), soupçonna un jour son orfèvre de l'avoir volé. L'artisan avait-il remplacé par de l'argent une partie de l'or fourni pour fabriquer la couronne du roi? Hiéron demanda à son ami Archimède de vérifier quelle proportion d'argent contenait l'ornement royal. Le grand géomètre chercha à évaluer le volume de la couronne et sa densité. Toutefois, la forme compliquée de la couronne interdisait tout calcul simple. La légende veut qu'Archimède prit un bain pour réfléchir, et qu'il remarqua que la baignoire débordait quand il y entra. Il comprit alors que l'immersion d'un corps déplace une quantité d'eau équivalente à son volume. Il se serait alors élancé nu dans la rue en criant *Eureka!*

Archimède formula ainsi ce qu'il avait observé : tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale dirigée vers le haut et égale au poids du volume de liquide déplacé. Hiéron serait satisfait! Pour déterminer la densité de la couronne par rapport à celle de l'eau, il lui suffisait de mesurer la diminution de son poids apparent dans l'eau. Imaginons les mesures qu'Archimède réalisa pour satisfaire le roi. Sans doute commença-t-il par peser la couronne en la suspendant sous le plateau d'une

balance. Puis, il répéta l'opération en immergeant la couronne dans l'eau. Pour rétablir l'équilibre, Archimède dut retirer des poids du plateau opposé à celui qui soutenait la couronne. Il calcula ensuite la densité du métal en faisant le rapport entre le poids de la couronne du roi et le poids retiré du plateau. Archimède répéta ensuite cette opération avec un lingot d'or, afin de comparer la densité de la couronne à celle de l'or pur.

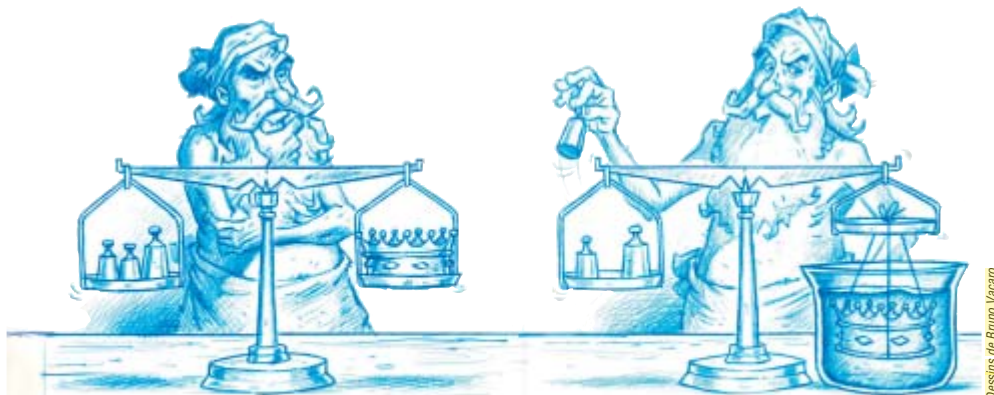
ARCHIMÈDE ET LA PRESSION

Pourquoi la poussée d'Archimède est-elle toujours dirigée vers le haut et égale au poids du volume du liquide déplacé? Quand la pression qui règne dans un fluide est uniforme, la résultante des forces qui s'exercent à la surface d'un volume de forme quelconque est nulle. En revanche, au sein d'un fluide placé à la surface de la Terre, la pression n'est pas uniforme, mais croît avec la profondeur à cause de la gravité. Dans les océans, par exemple, la pression augmente de l'équivalent d'une fois la pression atmosphérique tous les dix mètres (quelque 10^5 pascals). La force d'Archimède est verticale, car elle résulte de la différence entre les pressions qui

règnent à des altitudes variées au sein du fluide. Examinons le cas d'un tube cylindrique immergé en position verticale. Un tel tube est symétrique : les forces de pression qui agissent sur la partie verticale de sa surface se compensent exactement : dans chaque plan horizontal, la résultante des forces qui s'exercent sur le corps immergé est nulle. En revanche, la pression que subit le tube sur sa face inférieure est plus grande que celle qui s'exerce sur sa face supérieure. Dirigée vers le haut, la résultante des forces de pression – la poussée d'Archimède – est la même que celle que le fluide exercerait sur une « colonne d'eau » occupant le même volume. Une telle colonne d'eau est en équilibre, puisqu'elle est immergée dans... de l'eau. Son poids contrebalance exactement la poussée d'Archimède : cette dernière est égale au poids de la colonne d'eau, c'est-à-dire au « poids du volume du liquide déplacé ». On généralise ce raisonnement à des objets de formes quelconques.

Valable au sein des liquides, la loi d'Archimède s'applique à n'importe quel gaz soumis à l'attraction gravitationnelle terrestre. Ainsi, comme dans l'eau, la pression atmosphérique diminue dans l'air, avec l'altitude, mais beaucoup plus lentement. Un objet placé dans l'air subit aussi une poussée d'Archimède, car il déplace un volume d'air. Celle-ci est environ 1 000 fois inférieure à celle qui règne dans l'eau, car l'air est 1 000 fois moins dense que l'eau. C'est pourquoi en dehors de l'étude des aérostats et autres montgolfières, il est courant de négliger la force d'Archimède exercée par l'air.

Un objet dont la poussée d'Archimède compense le poids semble être en impesanteur. Dans la mer, il flotte entre deux eaux. Ce type d'équilibre est utilisé, par exemple, pour entraîner les astronautes aux manœuvres dans l'espace. On les immerge avec leur scaphandre dans une piscine, de sorte que la force d'Archimède les maintient en suspension. Toutefois, contrairement à la pesanté, la force d'Archimède n'agit pas sur l'oreille interne, qui contrôle l'équilibre. Les astronautes



Archimède voulait connaître la densité de la couronne royale. Sans doute a-t-il d'abord pesé la couronne (à gauche). Puis, il a plongé la couronne dans de l'eau (à droite). L'eau exerce une force dirigée vers le haut qui déséquilibre la balance. Pour la redresser, on doit enlever un poids égal à celui du volume d'eau déplacé : ici le volume v de la couronne, multiplié par la masse volumique de l'eau, égale à un gramme par centimètre cube (soit $\rho_{\text{eau}} v$). Or le poids total de la couronne est égal à son volume v , multiplié par la masse volumique de l'alliage dont elle est faite (soit $\rho_{\text{alliage}} v$). Le rapport de ces deux résultats donne le rapport des deux masses volumiques, c'est-à-dire la densité de l'alliage.

Dessins de Bruno Vacaro

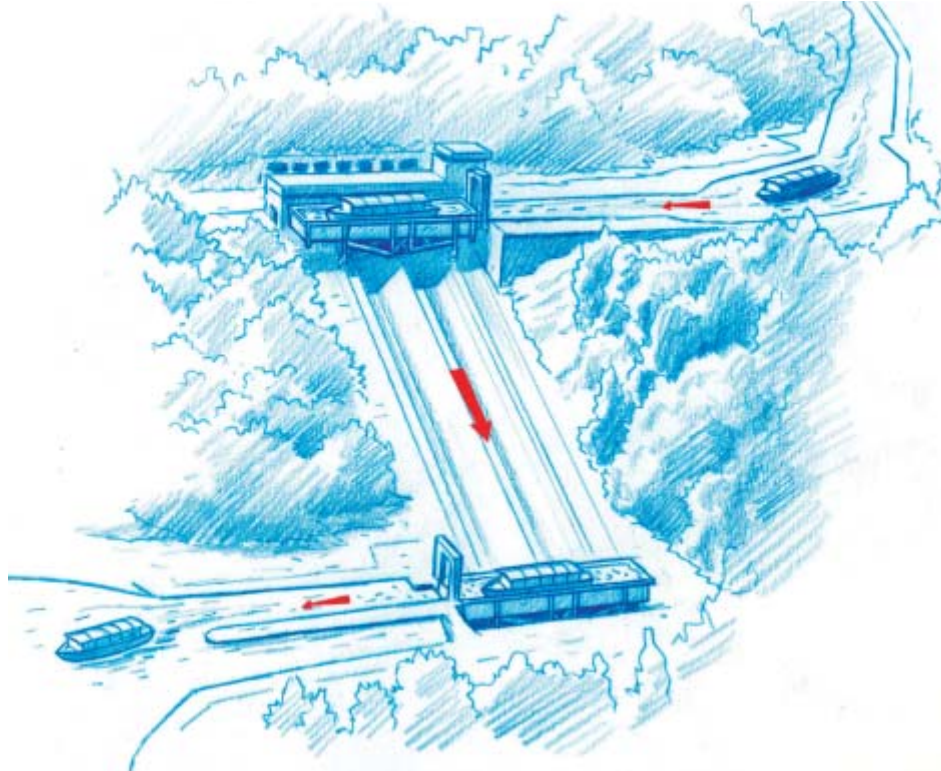
à l'entraînement dans une piscine contiennent donc à distinguer le haut du bas. Dans l'espace, au contraire, il n'y a plus ni haut ni bas.

La possibilité de modifier le poids apparent dans l'eau est essentielle dans un sous-marin. Pour le faire remonter à la surface ou le faire plonger, les sous-mariniers contrôlent l'intensité du poids apparent de leur bâtiment en vidant ou remplissant les réservoirs de plongée (les ballasts), qui se trouvent entre la coque intérieure et la coque extérieure du bâtiment. Le sous-marin français *Le Triomphant*, par exemple (138 mètres de longueur), déplace 14 300 tonnes d'eau en plongée. Pour le faire remonter à la surface, il faut évacuer plus de 1 700 tonnes de l'eau contenue dans les ballasts et les remplacer par de l'air. Quand la masse du *Le Triomphant* diminue de cette quantité, la poussée d'Archimède qu'il subit excède son poids. Le sous-marin devient alors... un bateau.

UN ASCENSEUR À BATEAUX

Bien que les navires modernes aient une structure en métal, bien plus dense que l'eau, leur densité moyenne est faible, car ils contiennent de l'air dans leurs cales. Le niveau de flottaison de ces bateaux d'acier varie en fonction de leurs charges. Ceci pose des difficultés de stabilité aux cargos, souvent instables à vide. Trop hauts sur l'eau, ils offrent une grande prise au vent et aux vagues ; sur certains navires, il arrive même que l'hélice sorte de l'eau ! Les marins rétablissent la stabilité de leur bâtiment en lestant les cales avec de l'eau. Ils en introduisent parfois jusqu'à 80 000 tonnes ! Nommée « ballastage », cette opération est nécessaire quasiment à chaque voyage. Il arrive ainsi qu'un cargo plein doive transporter 40 pour cent de sa charge non marchande sous la forme d'eau de ballast. Une proportion qui augmente si le mauvais temps impose une meilleure stabilité. Le ballastage a de nombreux inconvénients pour l'environnement : au cours de la vidange des cales, les déchets et les restes de produits chimiques qu'elles contenaient, voire des hydrocarbures, sont rejetés à la mer de façon incontrôlée. De surcroît, l'eau de ballast transporte des espèces marines. Lors d'une vidange, une espèce étrangère, provenant d'un autre océan, risque d'être rejetée à la mer. Des algues tropicales, par exemple, risquent de proliférer au détriment d'espèces locales.

La ligne de flottaison d'un navire dépend aussi de la densité et de la température de l'eau. Ainsi, même si la mer



Le « plan incliné » est un ascenseur à bateaux situé à Saint-Louis-Arzviller en Lorraine. Unique en son genre en Europe, il remplace à lui seul 17 écluses. Un bassin a été conçu pour contenir 900 tonnes d'eau. Des moteurs et des contrepoids le font descendre ou monter sur le plan incliné. Quand un bateau pénètre dans le bassin mobile, il chasse une masse d'eau équivalente au poids du volume immergé, de sorte que la masse du bassin mobile reste constante. Une péniche descend ou monte ainsi 44 mètres en quatre minutes.

Noire et la mer Méditerranée sont connectées, leurs salinités sont différentes. Tandis qu'un litre d'eau de la Méditerranée contient 38 grammes de sel, le même volume d'eau de la mer Noire n'en contient que 18 grammes. À température égale (à 20 °C, par exemple), cette différence de salinité fait varier la poussée d'Archimède de 1,5 pour cent. Quand un navire quitte la Méditerranée et pénètre en mer Noire, il s'enfonce jusqu'à ce que son volume immergé ait augmenté de 1,5 pour cent. Si, poursuivant sa route, il remonte le Danube, son volume immergé augmente encore de 1,5 pour cent. En fonction de la charge du navire et de son tirant d'eau, une telle variation risque d'être problématique. C'est pourquoi des règles internationales imposent que les niveaux de flottaison en eau douce ou en mer figurent clairement sur les flancs des navires.

Si elle fait flotter les bateaux, la poussée d'Archimède sert aussi à les soulever. Cette application est mise en œuvre dans le « plan incliné », l'ascenseur à bateaux de Saint-Louis-Arzviller en Lorraine. Dans cette installation, les péniches sont non seulement soulevées, mais les écluses qui les contiennent également ! Quand le « bassin » est en position haute, l'une de ses extrémités s'ouvre pour permettre au bateau d'entrer. La péniche pénètre dans l'écluse transportable, et une quantité d'eau correspondant au volume qu'elle

déplace quitte le bassin vers le canal. Or, d'après la loi d'Archimède, le poids de cette eau sortante équivaut au poids du volume immergé. Ainsi, l'écluse mobile pèse 900 tonnes, qu'elle contienne ou non un bateau ! Grâce à cette régulation automatique du poids de l'écluse, les moteurs et les contrepoids ont été dimensionnés une fois pour toutes, c'est-à-dire pour tous les bateaux. Couchées sur le plan incliné à 22 degrés de l'ascenseur, deux masses de 450 tonnes contrebalancent le poids de l'écluse mobile. Comme dans un ascenseur classique, elles glissent vers le haut ou vers le bas au bout de leurs câbles en fonction du mouvement nécessaire. À la montée, les moteurs n'ont qu'à vaincre les forces de frottement. À la descente, ils ne servent qu'à contrôler un mouvement naturel dû à un léger excès d'eau que l'on a introduit dans le bassin. En quatre minutes, le plan incliné transporte ainsi une péniche sur un dénivelé de 44 mètres.

Roland LEHOUCQ est astrophysicien au Service d'astrophysique du CEA. **Jean-Michel COURT**y, chargé de recherche au CNRS, travaille au Laboratoire Kastler-Brossel (CNRS, ENS).

La mécanique, exposé historique et critique de son développement, Ernst Mach, A. Hermann, 1904, réédition J. Gabay 1987.