

COMPLEXITÉ DE KOLMOGOROV ET VALEUR ESTHÉTIQUE

La complexité de Kolmogorov d'une oeuvre d'art est la taille du plus petit programme d'ordinateur qui permet de spécifier complètement cette oeuvre d'art.

La complexité de Kolmogorov peut servir à exprimer notre désir qu'une oeuvre ne soit pas trop simple : pour pouvoir prétendre être une oeuvre d'art un objet doit dépasser un seuil de complexité de Kolmogorov. Ce seuil est sans doute autour de 100 bits. Il ne faut cependant pas déduire de l'existence de ce seuil que plus la complexité de Kolmogorov est grande, plus un objet a des chances de paraître beau.



Les images 1 et 2 ont une complexité de Kolmogorov à peu de chose près égale. Pourtant, tout le monde s'accordera à trouver que l'image 1 est plus belle que l'image 2. La beauté n'est pas liée seulement à la complexité de Kolmogorov.

prix entre 1500 et 12000 dollars pour les monochromes de Reinhardt). Le mouvement minimaliste nous intéresse car il nous conduit à la question : un objet très simple, complètement décrit par quelques mots peut-il être considéré comme beau ? Là encore, la quasi totalité de l'humanité répond sans hésitation : non. Si la définition d'un objet se réduit à trois fois rien, si n'importe qui peut s'en faire facilement une copie, cet objet n'est ni beau ni laid. L'objet esthétique doit comporter un minimum de contenu informationnel : le vide, le rien, le néant n'ont pas de valeur artistique sauf chez les snobs, les escrocs et les fous.

LA COMPLEXITÉ DE KOLMOGOROV

Puisqu'un accord, à peu près unanime, concernant la simplicité des œuvres d'art semble exister, la complexité de Kolmogorov qui donne un sens rigoureux au concept de simplicité pourrait être le premier élément mathématique pertinent pour la formulation de critères formels généraux concernant l'esthétique.

La complexité de Kolmogorov d'un objet est la taille du plus petit programme d'ordinateur qui spécifie complètement cet objet. Pour un dessin ou une peinture, c'est la taille du plus petit programme qui permet de reproduire l'image de l'œuvre sans rien perdre de ce que nous en percevons. L'idée de Kolmogorov est simplement de rendre formelle l'intuition commune que «le simple est ce qui se dit en peu de mots» et «le complexe est ce qu'on ne réussit pas à comprimer quoi qu'on fasse».

Pourvu qu'on utilise un langage informatique assez puissant (un langage «universel»), la complexité de Kolmogorov ne dépend que très peu du langage choisi pour mesurer la taille des programmes. C'est d'ailleurs cette invariance qui rend la notion intéressante. La notion de langage universel va être importante pour la suite et mérite quelques précisions. À la suite de l'article fondateur de la théorie de la calculabilité publié en 1936 par le mathématicien britannique Alan Turing on a découvert que dès qu'un langage de programmation comporte un minimum d'opérations (boucle «pour», opérateur

«si... alors... sinon...», «go to», opérations arithmétiques +, -, ×, etc.) alors toute fonction programmable dans un langage informatique quel qu'il soit est programmable dans ce langage. Autrement dit, dès qu'une certaine puissance de programmation est atteinte, un langage informatique peut servir à programmer toute fonction qui peut l'être (les vitesses de calcul ne sont pas prises en considération, seuls les résultats comptent).

Les langages qui possèdent ce minimum de puissance sont dit universels et la grande majorité des langages utilisés en informatique aujourd'hui le sont. La taille du programme minimum permettant par exemple de décrire *La Joconde* différerait peu d'un langage de programmation universel à un autre et c'est cette taille, notée $K(\text{Joconde})$, qui constitue la complexité de Kolmogorov de la Joconde. En revanche, si un langage L n'est pas universel la taille du programme minimum qui dans ce langage décrit *La Joconde* sera bien plus grande que $K(\text{Joconde})$. Si L par exemple ne permet que de décrire une image qu'en la codant par un programme du type :

«image de taille 1000 x 1000 ; pixel 1 : couleur 216 ; pixel 2 : couleur 2111 ; ... ; pixel 100000 : couleur : 521», alors il est clair qu'aucune description courte de la Joconde ne sera possible. Un langage un peu plus riche qui permettrait de représenter une image par un codage du type : «image de taille 1000 x 1000 ; pixel de 1 à 23 : couleur 212 ; pixel de 24 à 32 : couleur 332, etc.» autoriserait une représentation plus courte des images, et surtout de celles qui comportent de grandes plages de couleur uniforme.

À côté de la complexité de Kolmogorov $K(ob)$ d'un objet ob , définie en faisant référence à la taille du plus petit programme décrivant ob (avec un langage universel), il est utile d'envisager la complexité de ob relativement à L , L étant un langage non universel, définie comme la taille du plus petit programme qui définit l'objet ob dans le langage L , et que nous noterons $Comp_L(ob)$.

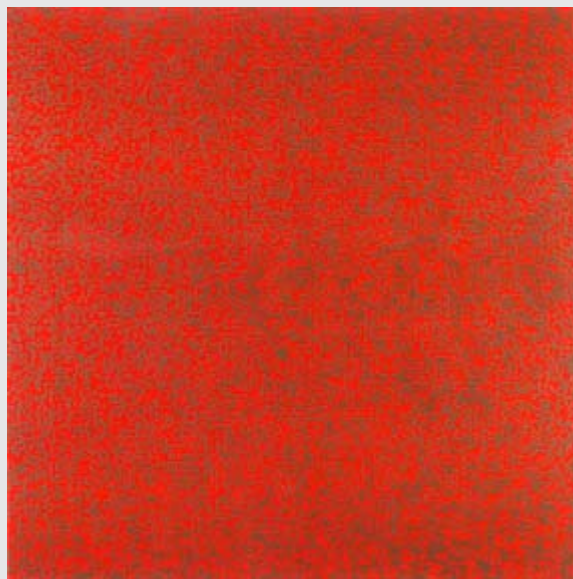
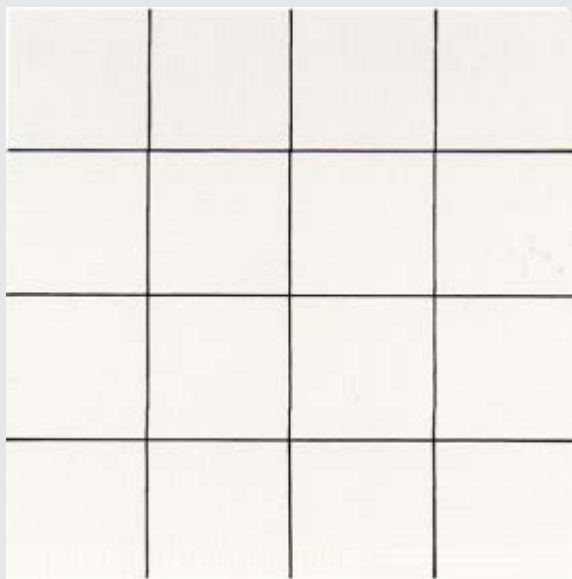
On ne peut calculer la complexité de Kolmogorov $K(ob)$ avec exactitude que dans des cas très rares. Lorsque L est un langage simple, $Comp_L(ob)$ est plus facilement calculable.

Les algorithmes de compression de données, très utilisés en informatique aujourd'hui, sont souvent fondés sur des langages non universels : l'algorithme de compression recherche un codage de l'objet que l'on veut comprimer. Ce codage est une sorte de programme utilisé par l'algorithme de décompression. La taille de la version comprimée de l'objet ob est donc une mesure de

MORELLET, ARTISTE PROVOCATEUR ET STIMULANT

Les œuvres de l'artiste François Morellet, à qui la Galerie Nationale du Jeu de Paume a rendu un hommage en janvier 2001, sont une exploration parfois provoquante du problème de la complexité et de l'art. La plupart de ses œuvres sont proches du seuil de complexité en dessous

duquel il est impossible de qualifier un objet de beau ou de laid. Certaines n'atteignent pas ce seuil, et on reste étonné, comme pour les peintures monochromes de Reinhardt, qu'elles puissent avoir une valeur marchande (tant mieux pour lui).



ADAGP

À droite, *16 carrés* 1953 L'artiste «a cherché à minimiser le nombre de décisions prises pour terminer son travail et, sans oser un tableau tout blanc, s'en est approché». La complexité de cette peinture n'atteint pas le seuil minimum que la majorité d'entre nous exigeons pour qualifier un objet d'œuvre artistique.

À gauche, *Répartition aléatoire de 40 000 carrés 50% rouge, 50% marron* 1961. On admire la patience qu'il faut pour réaliser de telles peintures. Ce travail pose un problème. Il ne satisfera guère la majorité des amateurs qui ne lui attribueront pas le statut d'œuvre d'art : d'une certaine façon ce tableau est aussi vide qu'un tableau monochrome. Pourtant sa complexité de Kolmogorov est

assez importante car 40 000 choix aléatoires correspondent à une complexité de Kolmogorov de 40000 bits. La solution à cet apparent paradoxe est que cette œuvre ne satisfait pas le critère de Yéléhada : toute la complexité étant concentrée sur le seul choix de la couleur des carrés, un langage de description élémentaire L réussit très bien à compresser ce tableau, conduisant à une valeur presque égale de $ComplL(ob)$ et $K(ob)$. Ce tableau illustre donc parfaitement qu'une complexité de Kolmogorov importante ne suffit pas toujours à produire une œuvre, et que le critère de Yéléhada pourrait bien être une condition nécessaire pour qu'un objet possède une valeur artistique.

π ironicon. *Métal à partir des décimales de Pi*. Cette série de travaux, que, là encore, il est difficile de considérer comme beaux ou laids est construite à partir des décimales du nombre π qui sont utilisées par F. Morellet non pas parce que ce sont les décimales de π , mais parce que cela lui assure de ne pas faire les choix (des angles entre les segments) lui-même. Celui qui le souhaite peut vérifier que l'œuvre n'est pas truquée : les angles n'ont pas été choisis par l'artiste «pour faire beau», mais sont imposés par une règle contrôlable.

Un tel objet possède une faible complexité de Kolmogorov (car les décimales de π ont une faible complexité de Kolmogorov), mais ne diffère pas sur le plan esthétique d'un objet équi-



valent où les angles auraient été choisis avec un dé et qui lui aurait une complexité de Kolmogorov élevée (mais ne satisferait pas le critère de Yéléhada). Ces objets montrent donc que notre jugement esthétique ne peut pas prendre en compte certaines régularités algorithmiques

que l'esprit ne perçoit pas : utiliser les décimales de π ou une suite aléatoire ne change pas la valeur esthétique, mais peut changer profondément la complexité de Kolmogorov et la nature mathématique des objets. Le concept de profondeur de Bennett qui, dans les deux cas, serait ici faible, permettra peut-être de traiter de telles situations délicates.