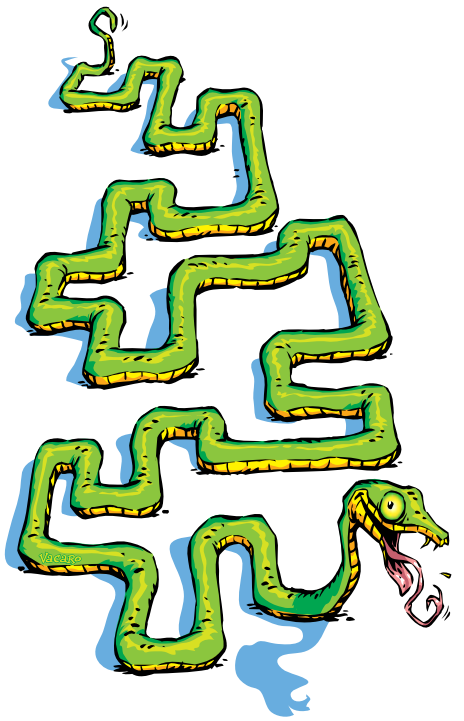


Les chemins aléatoires

WENDELIN WERNER

Physiciens et mathématiciens progressent conjointement dans l'étude des courbes planes qui cheminent de façon hasardeuse. Une conjecture de Benoît Mandelbrot a été élucidée.



C'est le lendemain de Noël. Le petit Grégoire, assis au milieu de sa chambre, contemple le cadeau dont il rêvait depuis des mois : un train électrique. La boîte qui contient les rails est énorme, elle lui arrive sous le menton. Grégoire imagine sa chambre envahie par la voie d'un chemin de fer tortueux. Reproduire les grandes lignes droites du TGV Paris-Lyon ne l'intéresse pas, il préfère les petites voies sinueuses de montagne qui, lacet après lacet, s'enfoncent à travers les reliefs. Pour obtenir ces lacets, il laissera le hasard guider le tracé de la voie ; celui-ci ne respectera pas de plan élaboré à l'avance, mais se

constituera par exemple au gré des courbes et des lignes droites piochées au hasard dans la boîte. Comme la boîte de rails ne contient ni aiguillage, ni pont, la voie de chemin de fer sera une longue courbe sinueuse qui ne se coupe pas. Grégoire se demande combien de tracés différents sont possibles avec un nombre donné de rails. Sa chambre n'est peut-être même pas suffisamment grande pour contenir un tracé constitué de tous les rails. Il passe son regard d'un mur à l'autre pour en estimer la taille. Combien de rails va-t-il pouvoir placer ?

Sous des apparences ludiques, les questions posées par Grégoire ont intri-

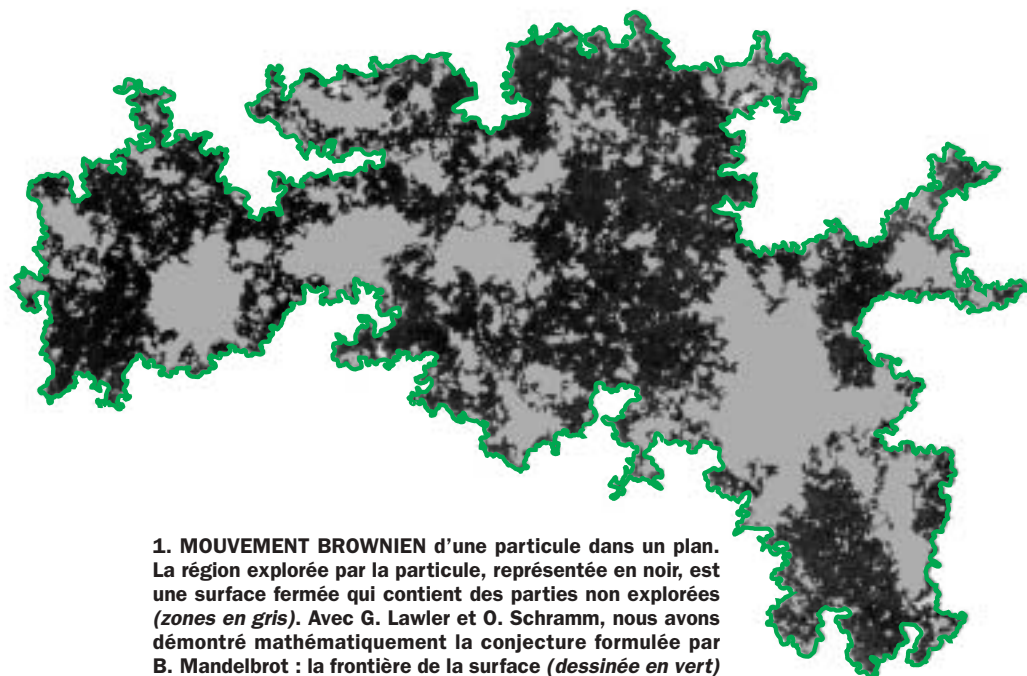
gué mathématiciens et physiciens depuis quelque soixante ans et cachent certains problèmes encore ouverts aujourd'hui.

On nomme des chemins qui ne repassent pas plusieurs fois par les mêmes points, des chemins auto-évitants. La nature nous en donne de nombreux exemples : rivières, contour de continents... Dans cet article, nous allons découvrir que certaines courbes aléatoires très irrégulières, comme la courbe verte de la figure 1, apparaissent naturellement comme des longs chemins auto-évitants construits à la manière de Grégoire. Tout d'abord, revenons un instant dans la chambre de celui-ci et tentons de répondre à sa première interrogation.

Le nombre de tracés

Combien Grégoire peut-il construire de voies de chemin de fer différentes ? Autrement dit, combien existe-t-il de chemins auto-évitants, tous constitués de n pas, dont les géométries sont différentes ? Considérons, parce que cela nous simplifie la tâche, que les uniques rails disponibles sont des segments identiques. Cette construction engendre des virages à angle droit, mais imaginons que le train de Grégoire est capable de s'en accommoder. Chaque nouveau rail peut prendre au plus trois orientations : les quatre directions Nord, Sud, Ouest et Est, moins celle d'où vient le tracé.

S'il est possible d'énumérer tous les tracés différents de faible longueur, il n'existe pas de formule explicite qui donne le nombre de tracés en fonction



1. MOUVEMENT BROWNIEN d'une particule dans un plan. La région explorée par la particule, représentée en noir, est une surface fermée qui contient des parties non explorées (zones en gris). Avec G. Lawler et O. Schramm, nous avons démontré mathématiquement la conjecture formulée par B. Mandelbrot : la frontière de la surface (dessinée en vert) est un chemin auto-évitant de dimension fractale $4/3$.

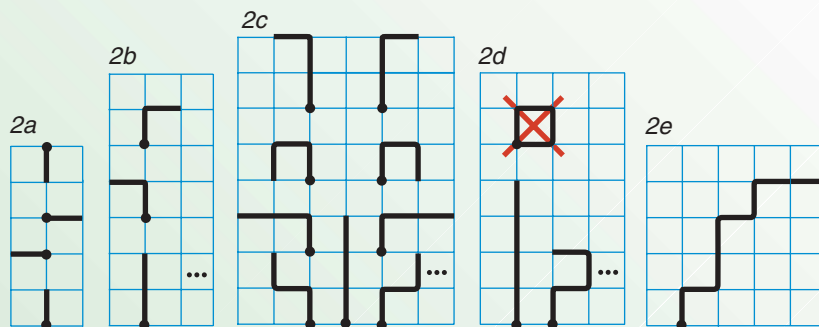
de n . Nous pouvons cependant démontrer (voir l'encadré ci-contre) que ce nombre contient un terme qui se comporte à l'infini comme μ à la puissance n . μ est compris entre 2 et 3, mais seules des simulations numériques nous renseignent sur sa valeur exacte : μ est approximativement égal à 2,638.

Comment ce résultat est-il modifié si Grégoire échange les rails à angle droit pour d'autres qui se rejoignent en faisant entre eux un angle de 120 degrés ? En pavant tout le plan avec de tels segments, nous obtenons un réseau hexagonal en «nid d'abeille». Chaque nouveau segment est maintenant placé non pas selon trois possibilités, mais deux. Un raisonnement similaire à celui du réseau carré démontre l'existence d'une constante μ' différente de μ . La valeur de μ dépend du type de rails utilisés.

Au début des années 1980, Bernard Nienhuis, un physicien néerlandais, prédit que le nombre de tracés auto-évitants se comporte, outre le terme μ^n que nous avons établi, comme une puissance de n . Précisément, il approxima ce nombre par $\mu'^n n^{11/32}$ et donna la valeur exacte de μ' du réseau en nid d'abeille. Nous avons montré que μ est fonction du type de rails utilisés, mais, à l'opposé, il est prédit que l'exposant 11/32 reste le même quel que soit le réseau sur lequel évolue le chemin auto-évitant. Ce genre de résultat est important : pour modéliser un phénomène, on est parfois conduit à discrétiser l'espace pour réduire le nombre de variables à traiter. Or, la discrétisation d'un gaz ou d'un liquide est arbitraire : faut-il faire évoluer les atomes sur les nœuds d'un réseau carré ou bien hexagonal ? Un résultat indépendant du type de réseau est particulièrement intéressant, car cela laisse penser qu'il reste vrai pour le phénomène réel.

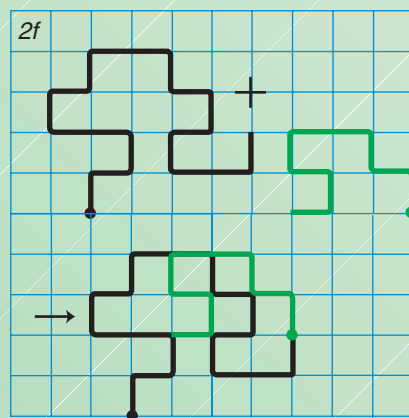
On peut interpréter l'exposant 11/32 en termes de non-intersection de chemins auto-évitants. Plaçons deux chemins auto-évitants de même longueur n , choisis au hasard parmi les a_n possibilités, au même point d'origine et évaluons la probabilité pour que les deux chemins ne se coupent pas. Ainsi que nous le voyons ci-contre, les deux chemins sont disjoints si et seulement si leur réunion forme un chemin auto-évitant de longueur $2n$. Parmi les $(a_n)^2$ chemins (pas nécessairement auto-évitants) que l'on peut construire avec les deux tracés, seuls a_{2n} ne possèdent pas d'intersection ;

2. LE NOMBRE DE CHEMINS AUTO-ÉVITANTS



Comptons les différents tracés d'un chemin auto-évitant constitué de n segments. Puisqu'il ne peut revenir sur lui-même, le tracé ne peut emprunter, à chaque nouveau segment, que trois directions parmi les quatre autorisées par le réseau carré. Pour un seul segment (figure 2a), il y a quatre possibilités ; pour deux, 12 (figure 2b) ; pour trois, 36 (figure 2c). À chaque nouveau segment, le nombre de tracés est multiplié par trois. Toutefois, à partir de quatre segments, certains tracés sont interdits par la condition d'auto-évitement (figure 2d), de sorte que le nombre de tracés devient inférieur à $4 \times 3^{(n-1)}$. Ainsi, pour quatre segments, le nombre de possibilités n'est pas 108, mais 100. Il faut faire appel aux ordinateurs pour recenser les tracés formés d'un grand nombre de segments.

Une borne inférieure du nombre de tracés est obtenue en dessinant des chemins qui ne partent que dans deux directions, par exemple le Nord et l'Est (figure 2e). Cette construction engendre des tracés qui ne se coupent pas. Comme il y a deux possibilités pour chaque nouveau segment, dans ce cas, le nombre de tracés est 2^n . Au total, le nombre de chemins auto-évitants à n segments est compris entre 2^n et $4 \times 3^{(n-1)}$.



À défaut de le déterminer exactement, nous allons évaluer le nombre de tracés quand le chemin auto-évitant devient infiniment long. Un probabiliste anglais, John Hammersley, fit, le premier, le raisonnement suivant. Mettons bout à bout deux chemins auto-évitants constitués respectivement de n et m segments (figure 2f). Il se peut que la réunion des deux tracés ne soit pas auto-évitante. Appelons a_n le nombre de tracés auto-évitants à n segments. Pour dénombrer les tracés construits avec $(n+m)$ segments, il nous faut retirer, parmi les $a_n a_m$ tracés possibles, ceux qui sont auto-évitants. Nous en déduisons que a_{n+m} est inférieur ou égal à $a_n a_m$.

Égalisons n à m dans l'inégalité $a_{n+m} \leq a_n a_m$ et élevons à la puissance $1/2n$. Nous voyons que $(a_{2n})^{1/2n} \leq (a_n)^{1/n}$, ce qui signifie que la valeur de la suite $(a_n)^{1/n}$ au rang n est supérieure ou égale à celle au rang $2n$. La suite décroît quand n progresse le long des puissances de deux et est minorée par deux. Le long des puissances de deux, elle converge donc vers un nombre μ supérieur à 2, dont on ne connaît pas la valeur exacte. Puisque a_n est inférieur à $4 \times 3^{(n-1)}$, μ est inférieur à 3. Plus généralement, on montre que la suite $(a_n)^{1/n}$ elle-même converge vers μ . En conséquence, quand le nombre de segments tend vers l'infini, le nombre de tracés auto-évitants se comporte comme μ^n . On nomme μ constante de connectivité du réseau, car elle est fonction de la nature du réseau sur lequel évolue le tracé : plus un nœud possède de voisins, plus μ est important. Par exemple, il est plus grand pour un réseau carré que pour un réseau en nid d'abeille. Il n'existe pas de formule explicite de μ pour le réseau carré ; on la calcule numériquement. On a aujourd'hui une estimation à une dizaine de décimales : μ est égal à 2,6381585...