

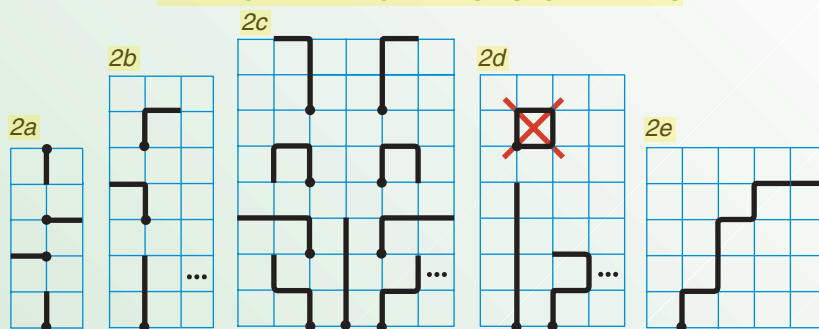
de n . Nous pouvons cependant démontrer (voir l'encadré ci-contre) que ce nombre contient un terme qui se comporte à l'infini comme μ à la puissance n . μ est compris entre 2 et 3, mais seules des simulations numériques nous renseignent sur sa valeur exacte : μ est approximativement égal à 2,638.

Comment ce résultat est-il modifié si Grégoire échange les rails à angle droit pour d'autres qui se rejoignent en faisant entre eux un angle de 120 degrés ? En pavant tout le plan avec de tels segments, nous obtenons un réseau hexagonal en «nid d'abeille». Chaque nouveau segment est maintenant placé non pas selon trois possibilités, mais deux. Un raisonnement similaire à celui du réseau carré démontre l'existence d'une constante μ' différente de μ . La valeur de μ dépend du type de rails utilisés.

Au début des années 1980, Bernard Nienhuis, un physicien néerlandais, prédit que le nombre de tracés auto-évitants se comporte, outre le terme μ^n que nous avons établi, comme une puissance de n . Précisément, il approxima ce nombre par $\mu^n n^{11/32}$ et donna la valeur exacte de μ' du réseau en nid d'abeille. Nous avons montré que μ est fonction du type de rails utilisés, mais, à l'opposé, il est prédit que l'exposant 11/32 reste le même quel que soit le réseau sur lequel évolue le chemin auto-évitant. Ce genre de résultat est important : pour modéliser un phénomène, on est parfois conduit à discrétiser l'espace pour réduire le nombre de variables à traiter. Or, la discrétisation d'un gaz ou d'un liquide est arbitraire : faut-il faire évoluer les atomes sur les nœuds d'un réseau carré ou bien hexagonal ? Un résultat indépendant du type de réseau est particulièrement intéressant, car cela laisse penser qu'il reste vrai pour le phénomène réel.

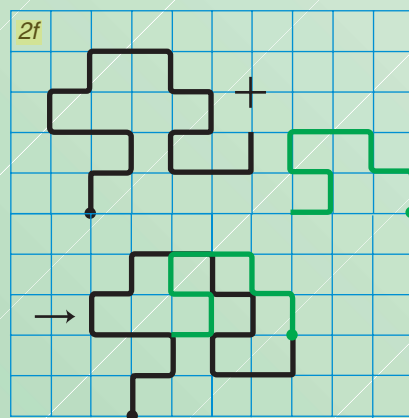
On peut interpréter l'exposant 11/32 en termes de non-intersection de chemins auto-évitants. Plaçons deux chemins auto-évitants de même longueur n , choisis au hasard parmi les a_n possibilités, au même point d'origine et évaluons la probabilité pour que les deux chemins ne se coupent pas. Ainsi que nous le voyons ci-contre, les deux chemins sont disjoints si et seulement si leur réunion forme un chemin auto-évitant de longueur $2n$. Parmi les $(a_n)^2$ chemins (pas nécessairement auto-évitants) que l'on peut construire avec les deux tracés, seuls a_{2n} ne possèdent pas d'intersection ;

2. LE NOMBRE DE CHEMINS AUTO-ÉVITANTS



Comptons les différents tracés d'un chemin auto-évitant constitué de n segments. Puisqu'il ne peut revenir sur lui-même, le tracé ne peut emprunter, à chaque nouveau segment, que trois directions parmi les quatre autorisées par le réseau carré. Pour un seul segment (figure 2a), il y a quatre possibilités ; pour deux, 12 (figure 2b) ; pour trois, 36 (figure 2c). À chaque nouveau segment, le nombre de tracés est multiplié par trois. Toutefois, à partir de quatre segments, certains tracés sont interdits par la condition d'auto-évitement (figure 2d), de sorte que le nombre de tracés devient inférieur à $4 \times 3^{(n-1)}$. Ainsi, pour quatre segments, le nombre de possibilités n'est pas 108, mais 100. Il faut faire appel aux ordinateurs pour recenser les tracés formés d'un grand nombre de segments.

Une borne inférieure du nombre de tracés est obtenue en dessinant des chemins qui ne partent que dans deux directions, par exemple le Nord et l'Est (figure 2e). Cette construction engendre des tracés qui ne se coupent pas. Comme il y a deux possibilités pour chaque nouveau segment, dans ce cas, le nombre de tracés est 2^n . Au total, le nombre de chemins auto-évitants à n segments est compris entre 2^n et $4 \times 3^{(n-1)}$.



À défaut de le déterminer exactement, nous allons évaluer le nombre de tracés quand le chemin auto-évitant devient infiniment long. Un probabiliste anglais, John Hammersley, fit, le premier, le raisonnement suivant. Mettons bout à bout deux chemins auto-évitants constitués respectivement de n et m segments (figure 2f). Il se peut que la réunion des deux tracés ne soit pas auto-évitante. Appelons a_n le nombre de tracés auto-évitants à n segments. Pour dénombrer les tracés construits avec $(n+m)$ segments, il nous faut retirer, parmi les $a_n a_m$ tracés possibles, ceux qui sont auto-évitants. Nous en déduisons que a_{n+m} est inférieur ou égal à $a_n a_m$.

Égalisons n à m dans l'inégalité $a_{n+m} \leq a_n a_m$ et élevons à la puissance $1/2n$. Nous voyons que $(a_{2n})^{1/2n} \leq (a_n)^{1/n}$, ce qui signifie que la valeur de la suite $(a_n)^{1/n}$ au rang n est supérieure ou égale à celle au rang $2n$. La suite décroît quand n progresse le long des puissances de deux et est minorée par deux. Le long des puissances de deux, elle converge donc vers un nombre μ supérieur à 2, dont on ne connaît pas la valeur exacte. Puisque a_n est inférieur à $4 \times 3^{(n-1)}$, μ est inférieur à 3. Plus généralement, on montre que la suite $(a_n)^{1/n}$ elle-même converge vers μ . En conséquence, quand le nombre de segments tend vers l'infini, le nombre de tracés auto-évitants se comporte comme μ^n . On nomme μ constante de connectivité du réseau, car elle est fonction de la nature du réseau sur lequel évolue le tracé : plus un nœud possède de voisins, plus μ est important. Par exemple, il est plus grand pour un réseau carré que pour un réseau en nid d'abeille. Il n'existe pas de formule explicite de μ pour le réseau carré ; on la calcule numériquement. On a aujourd'hui une estimation à une dizaine de décimales : μ est égal à 2,6381585...