

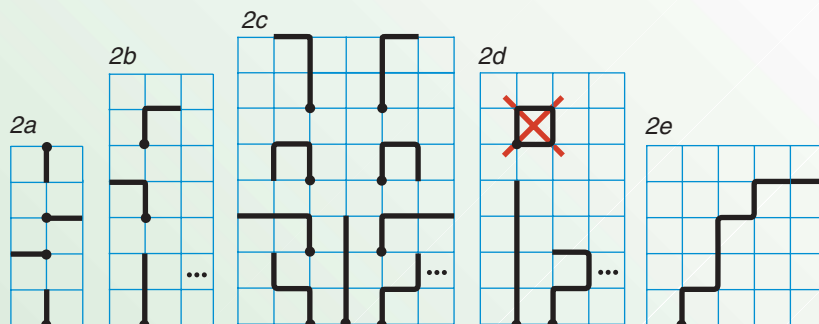
de n . Nous pouvons cependant démontrer (voir l'encadré ci-contre) que ce nombre contient un terme qui se comporte à l'infini comme μ à la puissance n . μ est compris entre 2 et 3, mais seules des simulations numériques nous renseignent sur sa valeur exacte : μ est approximativement égal à 2,638.

Comment ce résultat est-il modifié si Grégoire échange les rails à angle droit pour d'autres qui se rejoignent en faisant entre eux un angle de 120 degrés ? En pavant tout le plan avec de tels segments, nous obtenons un réseau hexagonal en «nid d'abeille». Chaque nouveau segment est maintenant placé non pas selon trois possibilités, mais deux. Un raisonnement similaire à celui du réseau carré démontre l'existence d'une constante μ' différente de μ . La valeur de μ dépend du type de rails utilisés.

Au début des années 1980, Bernard Nienhuis, un physicien néerlandais, prédit que le nombre de tracés auto-évitants se comporte, outre le terme μ^n que nous avons établi, comme une puissance de n . Précisément, il approxima ce nombre par $\mu^n n^{11/32}$ et donna la valeur exacte de μ' du réseau en nid d'abeille. Nous avons montré que μ est fonction du type de rails utilisés, mais, à l'opposé, il est prédit que l'exposant 11/32 reste le même quel que soit le réseau sur lequel évolue le chemin auto-évitant. Ce genre de résultat est important : pour modéliser un phénomène, on est parfois conduit à discrétiser l'espace pour réduire le nombre de variables à traiter. Or, la discrétisation d'un gaz ou d'un liquide est arbitraire : faut-il faire évoluer les atomes sur les nœuds d'un réseau carré ou bien hexagonal ? Un résultat indépendant du type de réseau est particulièrement intéressant, car cela laisse penser qu'il reste vrai pour le phénomène réel.

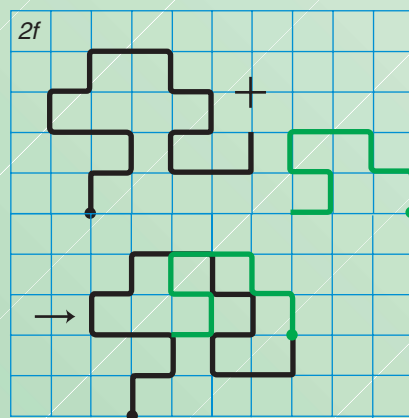
On peut interpréter l'exposant 11/32 en termes de non-intersection de chemins auto-évitants. Plaçons deux chemins auto-évitants de même longueur n , choisis au hasard parmi les a_n possibilités, au même point d'origine et évaluons la probabilité pour que les deux chemins ne se coupent pas. Ainsi que nous le voyons ci-contre, les deux chemins sont disjoints si et seulement si leur réunion forme un chemin auto-évitant de longueur $2n$. Parmi les $(a_n)^2$ chemins (pas nécessairement auto-évitants) que l'on peut construire avec les deux tracés, seuls a_{2n} ne possèdent pas d'intersection ;

2. LE NOMBRE DE CHEMINS AUTO-ÉVITANTS



Comptons les différents tracés d'un chemin auto-évitant constitué de n segments. Puisqu'il ne peut revenir sur lui-même, le tracé ne peut emprunter, à chaque nouveau segment, que trois directions parmi les quatre autorisées par le réseau carré. Pour un seul segment (figure 2a), il y a quatre possibilités ; pour deux, 12 (figure 2b) ; pour trois, 36 (figure 2c). À chaque nouveau segment, le nombre de tracés est multiplié par trois. Toutefois, à partir de quatre segments, certains tracés sont interdits par la condition d'auto-évitement (figure 2d), de sorte que le nombre de tracés devient inférieur à $4 \times 3^{(n-1)}$. Ainsi, pour quatre segments, le nombre de possibilités n'est pas 108, mais 100. Il faut faire appel aux ordinateurs pour recenser les tracés formés d'un grand nombre de segments.

Une borne inférieure du nombre de tracés est obtenue en dessinant des chemins qui ne partent que dans deux directions, par exemple le Nord et l'Est (figure 2e). Cette construction engendre des tracés qui ne se coupent pas. Comme il y a deux possibilités pour chaque nouveau segment, dans ce cas, le nombre de tracés est 2^n . Au total, le nombre de chemins auto-évitants à n segments est compris entre 2^n et $4 \times 3^{(n-1)}$.

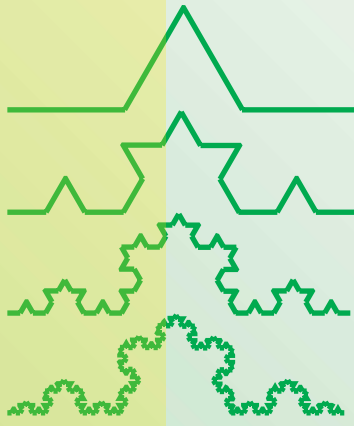


À défaut de le déterminer exactement, nous allons évaluer le nombre de tracés quand le chemin auto-évitant devient infiniment long. Un probabiliste anglais, John Hammersley, fit, le premier, le raisonnement suivant. Mettons bout à bout deux chemins auto-évitants constitués respectivement de n et m segments (figure 2f). Il se peut que la réunion des deux tracés ne soit pas auto-évitante. Appelons a_n le nombre de tracés auto-évitants à n segments. Pour dénombrer les tracés construits avec $(n+m)$ segments, il nous faut retirer, parmi les $a_n a_m$ tracés possibles, ceux qui sont auto-évitants. Nous en déduisons que a_{n+m} est inférieur ou égal à $a_n a_m$.

Égalisons n à m dans l'inégalité $a_{n+m} \leq a_n a_m$ et élevons à la puissance $1/2n$. Nous voyons que $(a_{2n})^{1/2n} \leq (a_n)^{1/n}$, ce qui signifie que la valeur de la suite $(a_n)^{1/n}$ au rang n est supérieure ou égale à celle au rang $2n$. La suite décroît quand n progresse le long des puissances de deux et est minorée par deux. Le long des puissances de deux, elle converge donc vers un nombre μ supérieur à 2, dont on ne connaît pas la valeur exacte. Puisque a_n est inférieur à $4 \times 3^{(n-1)}$, μ est inférieur à 3. Plus généralement, on montre que la suite $(a_n)^{1/n}$ elle-même converge vers μ . En conséquence, quand le nombre de segments tend vers l'infini, le nombre de tracés auto-évitants se comporte comme μ^n . On nomme μ constante de connectivité du réseau, car elle est fonction de la nature du réseau sur lequel évolue le tracé : plus un nœud possède de voisins, plus μ est important. Par exemple, il est plus grand pour un réseau carré que pour un réseau en nid d'abeille. Il n'existe pas de formule explicite de μ pour le réseau carré ; on la calcule numériquement. On a aujourd'hui une estimation à une dizaine de décimales : μ est égal à 2,6381585...

3. LA DIMENSION FRACTALE

Une courbe fractale est une courbe qui conserve le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on la regarde. L'exemple type en est une côte rocheuse. La côte bretonne vue à l'échelle de la région ou à celle de la pointe du Raz présente toujours les mêmes irrégularités. Comment mesurer la longueur des côtes si en s'en approchant de plus en plus, de nouveaux détails apparaissent : selon la taille de la règle qu'on utilise pour mesurer la longueur, les résultats diffèrent ! Pour éviter cet écueil, on définit une dimension fractale qui représente comment la longueur de la courbe varie avec la taille de la règle : en réduisant la taille de la règle d'un facteur X , la longueur de la courbe s'accroît d'un facteur X à la puissance d , d étant la dimension fractale. La dimension fractale est une mesure de la «rugosité» de la courbe : plus la courbe est sinueuse, plus grande est sa dimension fractale. Une courbe lisse a une dimension fractale égale à un.



En revanche, examinons la courbe fractale de Von Koch, construite par itération à partir d'une étoile à six branches (dont une seule est représentée sur la figure) : chaque arête est divisée en trois et le segment du milieu est remplacé par deux des arêtes d'un triangle équilatéral. Nous avons représenté ici les trois premières itérations. Avec une règle de la taille de la première arête, la longueur de la partie de courbe représentée est égale à quatre, tandis qu'avec une règle trois fois plus courte, la longueur est égale à 16. Comme trois à la puissance 1,26 est égal à quatre, la dimension fractale de la courbe de Von Koch est égale à 1,26.

La longueur d'un chemin auto-évitant mesurée avec une règle de la taille d'un segment est, par définition, égale au nombre de segments n . Mesurée avec une règle de la taille typique du tracé, la longueur est égale à un. La taille typique valant $n^{3/4}$, la dimension fractale du chemin auto-évitant est égale à 4/3.

Quand sa longueur est très grande, un chemin auto-évitant forme des méandres de toutes tailles et conserve le même aspect d'une échelle à une autre. Il ressemble à une courbe fractale dont une des caractéristiques est la dimension fractale qui exprime comment la longueur de la courbe varie en fonction de la taille de la règle dont on se sert pour la mesurer (voir la figure 3). La dimension fractale est l'inverse de la puissance intervenant dans la taille typique d'un tracé. La taille typique est la taille qu'on observe majoritairement en tirant un long chemin auto-évitant au hasard ; en principe, elle pourrait être, mais on pense que ce n'est pas le cas, notablement plus petite que la taille moyenne à cause de la contribution de chemins très longs, mais exceptionnels. Elle est du même ordre de grandeur que la taille moyenne. On en conclut que la dimension fractale est 4/3.

Mathématiquement, on ne sait démontrer ni cette dimension ni l'exposant de non-intersection décrit plus haut. Toutefois, avec Greg Lawler et Oded Schramm, nous avons construit mathématiquement une courbe aléatoire plane qui doit être en principe la limite des chemins auto-évitants tirés au hasard quand le nombre n de pas tend vers l'infini. Cette courbe se distingue des chemins auto-évitants notamment par le fait qu'elle n'évolue pas sur un réseau. On montre que la dimension fractale de cette courbe est effectivement 4/3 et que l'exposant de non-intersection est 11/32.

Nous pouvons donc répondre à la question de Grégoire sur la taille moyenne d'un chemin auto-évitant. Avec 100 rails de dix centimètres chacun, Grégoire construit une voie de chemin de fer de taille environ égale à dix fois $100^{3/4}$ centimètres, soit de l'ordre de trois mètres.

Considérons maintenant une manière plus naturelle pour Grégoire de construire son tracé. Il choisit à chaque pas une des directions possibles au hasard, en éliminant celles où le tracé se referme sur lui-même. Dans cette construction, tous les chemins auto-évitants possibles ne sont pas équiprobables. Par exemple, la probabilité de tracer un chemin tout droit est de $(1/3)^n$, tandis que celle d'obtenir tel ou tel chemin tortueux est plus grande, car, là où le tracé se referme sur lui-même, moins de trois placements différents des rails sont possibles. Puisque cette stratégie avantage les chemins tortueux, on

autrement dit, la probabilité de non-intersection est égale à $a_{2n}/(a_n)^2$. En utilisant l'expression de a_n prédite par B. Nienhuis, nous établissons que la probabilité est de l'ordre de grandeur de $n^{-11/32}$ et en concluons que l'exposant 11/32 décrit la vitesse à laquelle décroît la probabilité de non-intersection entre deux très longs chemins auto-évitants aléatoires.

La taille des chemins auto-évitants

Penchons nous maintenant sur la seconde interrogation de Grégoire : quelle est la taille moyenne d'un chemin aléatoire auto-évitant ? Par taille moyenne, nous entendons la distance moyenne entre les deux extrémités du tracé. Nous calculons la moyenne d'une grandeur en multipliant chacune des valeurs possibles de cette grandeur par la probabilité d'obtenir cette valeur. Nous allons voir que, selon la stratégie employée par Grégoire pour construire les tracés, la probabilité d'avoir tel ou

tel tracé diffère et, par conséquent, la taille moyenne également.

La première stratégie, naturelle du point de vue des applications physiques et chimiques, mais en pratique difficile à réaliser pour Grégoire, revient à choisir un chemin auto-évitant au hasard parmi tous les a_n chemins auto-évitants différents. Tous les tracés sont équiprobables. La taille moyenne d'un tracé est alors la somme des distances bout à bout de tous les chemins auto-évitants de même longueur divisée par le nombre total de chemins.

Un trajet auto-évitant à n pas ne va pas à une distance plus grande que n du point de départ. Par ailleurs, il visite n points différents. La manière la plus compacte de placer ces n points consiste à remplir un disque de rayon d'environ $\sqrt{n/\pi}$. La taille moyenne est donc comprise entre $\sqrt{n/\pi}$ et n . Après la suggestion faite par Paul Flory pour les polymères (voir la figure 4), en 1982, par une méthode de mécanique statistique, B. Nienhuis prédit qu'elle est de l'ordre de n à la puissance 3/4.