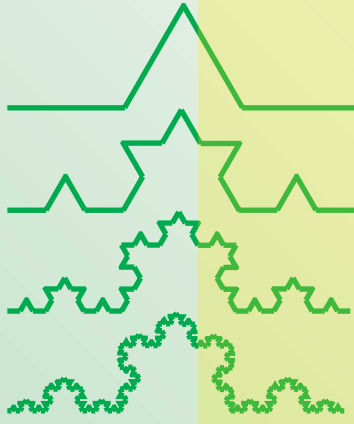


3. LA DIMENSION FRACTALE

Une courbe fractale est une courbe qui conserve le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on la regarde. L'exemple type en est une côte rocheuse. La côte bretonne vue à l'échelle de la région ou à celle de la pointe du Raz présente toujours les mêmes irrégularités. Comment mesurer la longueur des côtes si en s'en approchant de plus en plus, de nouveaux détails apparaissent : selon la taille de la règle qu'on utilise pour mesurer la longueur, les résultats diffèrent ! Pour éviter cet écueil, on définit une dimension fractale qui représente comment la longueur de la courbe varie avec la taille de la règle : en réduisant la taille de la règle d'un facteur X , la longueur de la courbe s'accroît d'un facteur X à la puissance d , d étant la dimension fractale. La dimension fractale est une mesure de la «rugosité» de la courbe : plus la courbe est sinueuse, plus grande est sa dimension fractale. Une courbe lisse a une dimension fractale égale à un.



En revanche, examinons la courbe fractale de Von Koch, construite par itération à partir d'une étoile à six branches (dont une seule est représentée sur la figure) : chaque arête est divisée en trois et le segment du milieu est remplacé par deux des arêtes d'un triangle équilatéral. Nous avons représenté ici les trois premières itérations. Avec une règle de la taille de la première arête, la longueur de la partie de courbe représentée est égale à quatre, tandis qu'avec une règle trois fois plus courte, la longueur est égale à 16. Comme trois à la puissance 1,26 est égal à quatre, la dimension fractale de la courbe de Von Koch est égale à 1,26.

La longueur d'un chemin auto-évitant mesurée avec une règle de la taille d'un segment est, par définition, égale au nombre de segments n . Mesurée avec une règle de la taille typique du tracé, la longueur est égale à un. La taille typique valant $n^{3/4}$, la dimension fractale du chemin auto-évitant est égale à 4/3.

Quand sa longueur est très grande, un chemin auto-évitant forme des méandres de toutes tailles et conserve le même aspect d'une échelle à une autre. Il ressemble à une courbe fractale dont une des caractéristiques est la dimension fractale qui exprime comment la longueur de la courbe varie en fonction de la taille de la règle dont on se sert pour la mesurer (voir la figure 3). La dimension fractale est l'inverse de la puissance intervenant dans la taille typique d'un tracé. La taille typique est la taille qu'on observe majoritairement en tirant un long chemin auto-évitant au hasard ; en principe, elle pourrait être, mais on pense que ce n'est pas le cas, notablement plus petite que la taille moyenne à cause de la contribution de chemins très longs, mais exceptionnels. Elle est du même ordre de grandeur que la taille moyenne. On en conclut que la dimension fractale est 4/3.

Mathématiquement, on ne sait démontrer ni cette dimension ni l'exposant de non-intersection décrit plus haut. Toutefois, avec Greg Lawler et Oded Schramm, nous avons construit mathématiquement une courbe aléatoire plane qui doit être en principe la limite des chemins auto-évitants tirés au hasard quand le nombre n de pas tend vers l'infini. Cette courbe se distingue des chemins auto-évitants notamment par le fait qu'elle n'évolue pas sur un réseau. On montre que la dimension fractale de cette courbe est effectivement 4/3 et que l'exposant de non-intersection est 11/32.

Nous pouvons donc répondre à la question de Grégoire sur la taille moyenne d'un chemin auto-évitant. Avec 100 rails de dix centimètres chacun, Grégoire construit une voie de chemin de fer de taille environ égale à dix fois $100^{3/4}$ centimètres, soit de l'ordre de trois mètres.

Considérons maintenant une manière plus naturelle pour Grégoire de construire son tracé. Il choisit à chaque pas une des directions possibles au hasard, en éliminant celles où le tracé se referme sur lui-même. Dans cette construction, tous les chemins auto-évitants possibles ne sont pas équiprobables. Par exemple, la probabilité de tracer un chemin tout droit est de $(1/3)^n$, tandis que celle d'obtenir tel ou tel chemin tortueux est plus grande, car, là où le tracé se referme sur lui-même, moins de trois placements différents des rails sont possibles. Puisque cette stratégie avantage les chemins tortueux, on

autrement dit, la probabilité de non-intersection est égale à $a_{2n}/(a_n)^2$. En utilisant l'expression de a_n prédite par B. Nienhuis, nous établissons que la probabilité est de l'ordre de grandeur de $n^{-11/32}$ et en concluons que l'exposant 11/32 décrit la vitesse à laquelle décroît la probabilité de non-intersection entre deux très longs chemins auto-évitants aléatoires.

La taille des chemins auto-évitants

Penchons nous maintenant sur la seconde interrogation de Grégoire : quelle est la taille moyenne d'un chemin aléatoire auto-évitant ? Par taille moyenne, nous entendons la distance moyenne entre les deux extrémités du tracé. Nous calculons la moyenne d'une grandeur en multipliant chacune des valeurs possibles de cette grandeur par la probabilité d'obtenir cette valeur. Nous allons voir que, selon la stratégie employée par Grégoire pour construire les tracés, la probabilité d'avoir tel ou

tel tracé diffère et, par conséquent, la taille moyenne également.

La première stratégie, naturelle du point de vue des applications physiques et chimiques, mais en pratique difficile à réaliser pour Grégoire, revient à choisir un chemin auto-évitant au hasard parmi tous les a_n chemins auto-évitants différents. Tous les tracés sont équiprobables. La taille moyenne d'un tracé est alors la somme des distances bout à bout de tous les chemins auto-évitants de même longueur divisée par le nombre total de chemins.

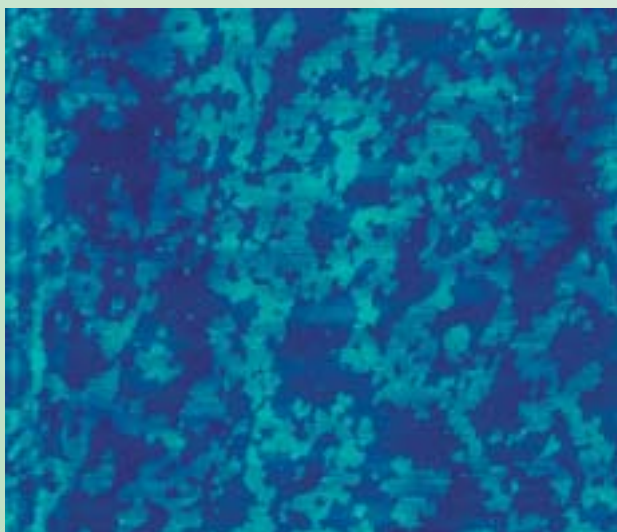
Un trajet auto-évitant à n pas ne va pas à une distance plus grande que n du point de départ. Par ailleurs, il visite n points différents. La manière la plus compacte de placer ces n points consiste à remplir un disque de rayon d'environ $\sqrt{n}/\pi$. La taille moyenne est donc comprise entre $\sqrt{n}/\pi$ et n . Après la suggestion faite par Paul Flory pour les polymères (voir la figure 4), en 1982, par une méthode de mécanique statistique, B. Nienhuis prédit qu'elle est de l'ordre de n à la puissance 3/4.

4. LES CHEMINS ALÉATOIRES DANS LES TRANSITIONS DE PHASE

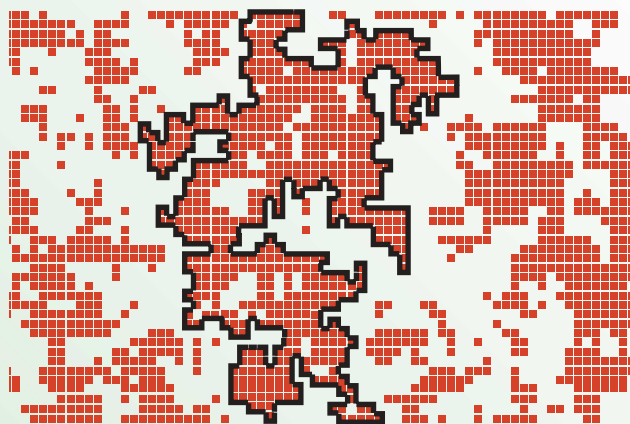
Les pionniers des chemins auto-évitants ont été des physico-chimistes qui travaillaient sur les polymères. Les polymères sont des chaînes moléculaires constituées par la répétition d'un grand nombre de molécules identiques, nommées monomères. Quand le polymère est plongé dans un liquide au fort pouvoir de dissolution, il se déplie et est libre de ses mouvements. Soumis à l'agitation thermique, il adopte alors au cours du temps toutes les configurations possibles du chemin auto-évitant (contrairement aux voies de chemin de fer, le polymère n'est pas restreint à se déplacer sur un réseau, de sorte que le nombre de configurations permises est infini). En moyenne dans le temps, la distance bout à bout du polymère est calculée comme la moyenne des distances bout à bout de toutes les configurations possibles prises par le polymère. Dans les années 1940, P. Flory a estimé l'énergie d'un polymère dans chacune des configurations et conjecturé que la distance bout à bout moyenne d'un polymère comportant n monomères est n à la puissance $3/4$. Nous savons depuis les années 1970 que le raisonnement développé par P. Flory était physiquement faux, mais a abouti au bon résultat.

L'intérêt des chemins auto-évitants en physique ne se limite pas à la modélisation des polymères. Les chemins auto-évitants ont pris une importance capitale au cours des deux dernières décennies dans la théorie des transitions de phase. Une transition de phase est le passage d'un corps d'un état physique à un autre. Prenons, par exemple, la transition magnétique du fer qui, lorsque sa température est inférieure à 771 °C, s'aimante spontanément. Au-dessus de cette température, dite de

«Curie» en hommage à Pierre Curie qui étudia les propriétés thermodynamiques des aimants, l'agitation ther-



TRANSITION DE PHASE dans une couche de phospholipides. Les phospholipides sont des molécules constituées d'une tête amphiphile et d'une ou de plusieurs queues hydrophobes. Des phospholipides DMPC sont ici déposés à la surface de l'eau et forment, dans certaines conditions de température et de densité, une couche où sont présentes deux phases fluides : l'une, bleu foncée, où les queues sont verticales et l'autre, bleu claire, où les queues sont libres de leur mouvement. Sur la photographie, on voit l'invariance d'échelle : des zones de toutes tailles coexistent.



SIMULATION D'UN MATÉRIAU FERROMAGNÉTIQUE à la température de Curie. Les carrés rouges représentent les spins qui pointent vers le haut et les blancs, ceux vers le bas. Le trait noir, qui dessine le contour d'un amas de spins de même sens, est un chemin aléatoire, auto-évitant à l'échelle du réseau, de dimension fractale $5/3$.

mique détruit l'aimantation. On retrouve l'apparition d'une aimantation spontanée dans de nombreux matériaux : on nomme ces matériaux des «ferromagnétiques». Dans un aimant, il existe des petits aimants élémentaires, de valeurs égales, mais de directions différentes. Au-dessus de la température de Curie, l'agitation thermique gagne devant l'interaction entre les aimants, qui les pousse à s'aligner ; à l'intérieur de l'échantillon, il y en a autant qui pointent vers la gauche, vers la droite, vers le haut et vers le bas, de sorte que l'aimantation totale est nulle par effet de moyenne. Au-dessous de la température de Curie, l'agitation thermique ne détruit pas complètement l'alignement souhaité par les aimants, et l'aimantation totale n'est pas nulle. À très basse température, toutes les directions sont alignées, et l'aimantation totale est maximale. À la température de Curie, il n'existe pas de taille type pour les zones où l'aimantation est uniforme. Au contraire, toutes les échelles entrent en jeu, de la taille atomique des aimantations élémentaires jusqu'à la dimension du barreau.

Ces résultats ressortent de l'étude de la fonction de corrélation entre spins, qui est une mesure de l'effet d'un spin sur un autre. Au-dessus de la température de Curie, les spins n'ont pas d'effet l'un sur l'autre : la fonction de corrélation entre spins est nulle. À très basse température, un spin qu'on amènerait à se retourner entraînerait tous les autres avec lui dans sa rotation : la corrélation est maximale. Plus les amas de même spin sont grands, plus les corrélations entre spins sont importantes. À deux dimensions, la frontière d'un amas de spins de même sens est un chemin aléatoire. Ce chemin est auto-évitant à l'échelle du réseau, mais peut perdre cette caractéristique quand le nombre de spins tend vers l'infini. On a montré que la fonction de corrélation entre spins est fonction des chemins aléatoires qui relient les spins. À la température de Curie, les amas sont de toutes les tailles et il faut sommer sur tous les chemins aléatoires possibles pour évaluer les corrélations. Dans le cas de la transition ferromagnétique, il est prédit que la dimension fractale de l'interface entre deux domaines magnétiques est $5/3$.

L. Kildemark, O. G. Mouritsen, Université Technique du Danemark, Lyngby