

5. LE MOUVEMENT BROWNIEN

Si un marcheur avance de façon hasardeuse en choisissant la direction prise à chaque nouveau pas aléatoirement parmi les quatre points cardinaux, après n pas, 4^n chemins se seront offerts à lui. Peut-être le marcheur est-il allé toujours tout droit dans la direction Nord, mais la probabilité que cela se produise décroît vite avec n (elle est égale à $1/4^n$). Le théorème dit de la « limite centrale » évalue la position du marcheur lorsque n est grand : après n pas, le marcheur se trouve à une distance de l'ordre de grandeur de $\sqrt{n}$ du point de départ. Le théorème prévoit qu'après 10 000 pas, la probabilité pour que le marcheur se trouve à une distance plus grande que 150 est plus petite que cinq pour cent. Les sondeurs utilisent un principe similaire pour déterminer les marges d'erreurs dans les sondages. Lorsque n tend vers l'infini, la trajectoire aléatoire ressemble de plus en plus à une trajectoire continue aléatoire nommée mouvement brownien plan.

Le mouvement brownien a été mis en évidence par le botaniste écossais Robert Brown en 1827 lors d'une étude au microscope du processus de fertilisation d'une nouvelle espèce de fleur. Il décrit le mouvement incessant d'un grain de matière, par exemple un grain de pollen, en suspension dans un liquide. On découvrit au début du XX^e siècle, notamment grâce aux tra-

vaux d'Albert Einstein, que ce mouvement était la résultante des fluctuations des chocs des molécules du liquide sur le grain de matière. Dans un liquide, les molécules sont en perpétuelle agitation et viennent percuter le grain de matière. On pourrait penser que, vu la différence de taille entre les molécules et le grain de matière, la résultante des chocs serait nulle, mais il n'en n'est rien. En notant la position du grain en fonction du temps, on voit qu'il décrit une trajectoire aléatoire pouvant changer de direction à chaque instant.

Le mouvement brownien est à l'origine du mécanisme de diffusion dans un liquide. Un morceau de sucre dans un verre d'eau se dissout, puis se répartit à densité égale dans tout le volume du verre. Les multiples chocs des molécules d'eau sur les molécules de sucre dispersent celles-ci dans le volume d'eau.

Le mouvement brownien est également utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution chaotique des cours de la bourse.

Dans le mouvement brownien, les quatre directions Nord, Sud, Est et Ouest ne jouent plus de rôle particulier : le mouvement brownien est isotrope et admet des propriétés d'invariance par transformation conformes utiles pour déterminer les propriétés des marches aléatoires.



MOUVEMENT D'UNE PARTICULE MICROSCOPIQUE EN SUSPENSION DANS L'EAU dessiné d'après les observations faites par le physicien Jean Perrin en 1912 : les points anguleux de la ligne brisée représentent les positions de la particule toutes les 30 secondes ; J. Perrin a noté que de tels graphiques « ne donnent qu'un faible aperçu de l'extraordinaire discontinuité de la trajectoire réelle ». En effet, en repérant plus fréquemment la position de la particule, on verrait une trajectoire brownienne analogue à celle représentée dans la figure 1.

s'attend à ce que la dimension fractale obtenue à la limite des longs chemins soit plus grande.

Il existe un système physique auquel ce chemin aléatoire est relié. Il s'agit de la percolation qui désigne la possibilité pour un fluide de circuler à travers un réseau de pores connectés à l'intérieur d'une roche. Dans certaines conditions et à deux dimensions, la frontière de la surface couverte par le fluide est un chemin auto-évitant. Bertrand Duplantier et Hubert Saleur ont conjecturé que la dimension fractale de cette frontière est $7/4$. Grâce aux recherches du mathématicien Russe Stanislav Smirnov (qui vient de recevoir le prix Clay de la recherche pour ses travaux) et à nos travaux avec G. Lawler et O. Schramm, ce résultat a été récemment démontré mathématiquement dans le cas du réseau en nid d'abeille.

La stratégie des boucles effacées

A la fin des années 1970, G. Lawler a inventé une troisième stratégie pour construire un chemin auto-évitant. Il s'agit de la stratégie des boucles effacées qui consiste à piocher les rails un par un, à les mettre bout à bout et, quand le circuit se recoupe, à retirer la boucle formée par les rails. On obtient ainsi un tracé nommé marche aléatoire à boucles effacées. Avec cette stratégie, Grégoire ne bâtit pas un chemin auto-évitant au hasard de manière uniforme, certains tracés étant plus probables que d'autres. Les physiciens théoriciens ont étudié les marches aléatoires à boucles effacées, car elles s'avèrent aussi reliées à des systèmes de physique statistique, et S. N. Majumdar a prédit que la distance typique entre le point de départ et le point d'arrivée avec n rails est de l'ordre de grandeur de $n^{4/5}$ lorsque n croît vers l'infini. La marche aléatoire à boucles effacées « se déplie » plus que la marche auto-évitante uniforme. En 1998, Richard Kenyon démontra mathématiquement cette prédiction en exploitant, entre autres, le lien entre les marches aléatoires à boucles effacées et la manière de carrelé une portion du plan avec des dominos (voir *Les théorèmes de l'impossible*, par Ian Stewart, *Pour la Science*, février 2000).

Nous allons maintenant, pour un moment, oublier les chemins auto-évitants et nous tourner vers les marches aléatoires autorisées à se couper.