

## 5. LE MOUVEMENT BROWNIEN

**S**i un marcheur avance de façon hasardeuse en choisissant la direction prise à chaque nouveau pas aléatoirement parmi les quatre points cardinaux, après  $n$  pas,  $4^n$  chemins se seront offerts à lui. Peut-être le marcheur est-il allé toujours tout droit dans la direction Nord, mais la probabilité que cela se produise décroît vite avec  $n$  (elle est égale à  $1/4^n$ ). Le théorème dit de la « limite centrale » évalue la position du marcheur lorsque  $n$  est grand : après  $n$  pas, le marcheur se trouve à une distance de l'ordre de grandeur de  $\sqrt{n}$  du point de départ. Le théorème prévoit qu'après 10 000 pas, la probabilité pour que le marcheur se trouve à une distance plus grande que 150 est plus petite que cinq pour cent. Les sondeurs utilisent un principe similaire pour déterminer les marges d'erreurs dans les sondages. Lorsque  $n$  tend vers l'infini, la trajectoire aléatoire ressemble de plus en plus à une trajectoire continue aléatoire nommée mouvement brownien plan.

Le mouvement brownien a été mis en évidence par le botaniste écossais Robert Brown en 1827 lors d'une étude au microscope du processus de fertilisation d'une nouvelle espèce de fleur. Il décrit le mouvement incessant d'un grain de matière, par exemple un grain de pollen, en suspension dans un liquide. On découvrit au début du XX<sup>e</sup> siècle, notamment grâce aux tra-

vaux d'Albert Einstein, que ce mouvement était la résultante des fluctuations des chocs des molécules du liquide sur le grain de matière. Dans un liquide, les molécules sont en perpétuelle agitation et viennent percuter le grain de matière. On pourrait penser que, vu la différence de taille entre les molécules et le grain de matière, la résultante des chocs serait nulle, mais il n'en n'est rien. En notant la position du grain en fonction du temps, on voit qu'il décrit une trajectoire aléatoire pouvant changer de direction à chaque instant.

Le mouvement brownien est à l'origine du mécanisme de diffusion dans un liquide. Un morceau de sucre dans un verre d'eau se dissout, puis se répartit à densité égale dans tout le volume du verre. Les multiples chocs des molécules d'eau sur les molécules de sucre dispersent celles-ci dans le volume d'eau.

Le mouvement brownien est également utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution chaotique des cours de la bourse.

Dans le mouvement brownien, les quatre directions Nord, Sud, Est et Ouest ne jouent plus de rôle particulier : le mouvement brownien est isotrope et admet des propriétés d'invariance par transformation conformes utiles pour déterminer les propriétés des marches aléatoires.



**MOUVEMENT D'UNE PARTICULE MICROSCOPIQUE EN SUSPENSION DANS L'EAU** dessiné d'après les observations faites par le physicien Jean Perrin en 1912 : les points anguleux de la ligne brisée représentent les positions de la particule toutes les 30 secondes ; J. Perrin a noté que de tels graphiques « ne donnent qu'un faible aperçu de l'extraordinaire discontinuité de la trajectoire réelle ». En effet, en repérant plus fréquemment la position de la particule, on verrait une trajectoire brownienne analogue à celle représentée dans la figure 1.

s'attend à ce que la dimension fractale obtenue à la limite des longs chemins soit plus grande.

Il existe un système physique auquel ce chemin aléatoire est relié. Il s'agit de la percolation qui désigne la possibilité pour un fluide de circuler à travers un réseau de pores connectés à l'intérieur d'une roche. Dans certaines conditions et à deux dimensions, la frontière de la surface couverte par le fluide est un chemin auto-évitant. Bertrand Duplantier et Hubert Saleur ont conjecturé que la dimension fractale de cette frontière est  $7/4$ . Grâce aux recherches du mathématicien Russe Stanislav Smirnov (qui vient de recevoir le prix Clay de la recherche pour ses travaux) et à nos travaux avec G. Lawler et O. Schramm, ce résultat a été récemment démontré mathématiquement dans le cas du réseau en nid d'abeille.

### La stratégie des boucles effacées

A la fin des années 1970, G. Lawler a inventé une troisième stratégie pour construire un chemin auto-évitant. Il s'agit de la stratégie des boucles effacées qui consiste à piocher les rails un par un, à les mettre bout à bout et, quand le circuit se recoupe, à retirer la boucle formée par les rails. On obtient ainsi un tracé nommé marche aléatoire à boucles effacées. Avec cette stratégie, Grégoire ne bâtit pas un chemin auto-évitant au hasard de manière uniforme, certains tracés étant plus probables que d'autres. Les physiciens théoriciens ont étudié les marches aléatoires à boucles effacées, car elles s'avèrent aussi reliées à des systèmes de physique statistique, et S. N. Majumdar a prédit que la distance typique entre le point de départ et le point d'arrivée avec  $n$  rails est de l'ordre de grandeur de  $n^{4/5}$  lorsque  $n$  croît vers l'infini. La marche aléatoire à boucles effacées « se déplie » plus que la marche auto-évitante uniforme. En 1998, Richard Kenyon démontra mathématiquement cette prédiction en exploitant, entre autres, le lien entre les marches aléatoires à boucles effacées et la manière de carrelé une portion du plan avec des dominos (voir *Les théorèmes de l'impossible*, par Ian Stewart, *Pour la Science*, février 2000).

Nous allons maintenant, pour un moment, oublier les chemins auto-évitants et nous tourner vers les marches aléatoires autorisées à se couper.

## Les marches aléatoires

Deux personnes errent au hasard dans un Manhattan infini (où, ainsi que dans beaucoup de villes américaines, les rues se croisent à angle droit). Elles effectuent chacune une marche aléatoire dans le réseau formé par les rues. Elles sont parties du même endroit, et nous voulons déterminer la probabilité  $p_n$  qu'elles parcourent des chemins qui ne se coupent pas. Dans cet exemple,  $n$  ne désigne pas le nombre de pas effectués par les marcheurs, mais le nombre de carrefours traversés. Au bout d'un temps infiniment long, leurs chemins se croisent obligatoirement : la probabilité de non-intersection tend vers zéro quand les trajets parcourus sont infiniment longs. La question est de savoir à quelle vitesse.

Michael Aizenman, chercheur à la double casquette de physicien théoricien et de mathématicien, a promis en 1984 une bouteille de vin français millésimée d'une grande année à qui déterminerait cette probabilité. En 1988, B. Duplantier et K.H. Kwon prédirent que la probabilité décroissait comme  $n^{-5/8}$ . Avec G. Lawler et O. Schramm, nous avons démontré récemment cette prédiction. Il est à noter que la preuve mathématique utilise des outils différents des arguments de la physique théorique, tels que le mouvement brownien, l'analyse complexe et l'invariance conforme. Ce résultat ne dépend pas du réseau utilisé, carré ou hexagonal.

## Le chemin auto-évitant, enveloppe du brownien

L'étude des exposants d'intersection des marches aléatoires est plus accessible mathématiquement que celle des chemins auto-évitants car lorsque  $n$  croît vers l'infini, on sait décrire un objet aléatoire vers lequel la marche aléatoire converge : le mouvement brownien (voir la figure 5). Nous pouvons ainsi relier les exposants à certaines propriétés de la trajectoire brownienne plane. En particulier, la détermination d'un exposant dit de disconnexion prouve la conjecture formulée par Benoît Mandelbrot au début des années 1980, qui devina, dans l'enveloppe d'une trajectoire brownienne, un chemin auto-évitant.

Faisons évoluer une trajectoire brownienne dans un plan et attendons qu'elle repasse près de son point de départ (cela



**6. LA BOUTEILLE DE VIN mise en jeu en 1984 par Michael Aizenman pour la détermination de la probabilité de non-intersection de deux marches aléatoires. Cette bouteille a été débouchée en 2001, à l'occasion d'un congrès pour célébrer la formule  $\xi(1,1) = 5/4$ . On reconnaît les signatures, dans l'ordre des aiguilles d'une montre à partir d'en haut à gauche, de B. Duplantier, G. Lawler, W. Werner, M. Aizenman et O. Schramm.**

peut être long, mais soyons patients, ça finira par arriver). Cette courbe (voir la figure 1), puisqu'elle est presque fermée, définit une surface. Traçons-en le contour en gras. B. Mandelbrot fit une analogie entre ce contour et les chemins auto-évitants et prédit que les deux types de courbes partagent la même dimension fractale, c'est-à-dire  $4/3$  (on avait déjà conjecturé que la dimension fractale des chemins auto-évitants était  $4/3$ ). En 1998, à partir de certains résultats que nous avons obtenus avec G. Lawler, B. Duplantier a utilisé le formalisme dit de «gravité quantique» (formalisme destiné à comprendre comment la gravité se comporte à petite échelle) pour donner une justification physique à la conjecture de B. Mandelbrot et à celle de l'exposant de non-intersection des marches aléatoires. En 2000, avec G. Lawler et O. Schramm, nous publions une démonstration mathématique de ce résultat.

Nous avons également démontré que, localement, le contour brownien ressemble à s'y méprendre à la seule limite possible des longs chemins auto-évitants que nous avions évoquée plus haut. Ceci peut paraître surprenant : le contour brownien est la frontière extérieure d'une surface. Regardons une carte de la Bretagne où

n'apparaîtraient que les contours de la côte. Grâce au dessin des embouchures des fleuves, nous serions en mesure, pour n'importe quel point de la côte, de préciser de quel côté du tracé se trouvent le continent et la mer. On pourrait penser qu'il en est de même pour le contour brownien et qu'il est possible, en observant une partie de celui-ci, de deviner de quel côté se situe la trajectoire brownienne. Puisqu'un chemin auto-évitant a exactement le même aspect vu d'un côté ou de l'autre, notre résultat montre que le contour brownien possède cette propriété de symétrie.

Notons avant de conclure que cette courbe auto-évitante fractale construite avec G. Lawler et O. Schramm peut être interprétée comme la manière naturelle de choisir au hasard parmi toutes les possibilités un chemin auto-évitant dans le plan. Cette courbe jouerait le même rôle vis-à-vis des chemins auto-évitants que le mouvement brownien vis-à-vis des marches aléatoires.

Les chemins auto-évitants, aussi simple soit leur construction, cachent, du point de vue de la physique théorique et du point de vue mathématique, des problèmes profonds dont les solutions utilisent des arguments assez élaborés issus de domaines aussi