

Les marches aléatoires

Deux personnes errent au hasard dans un Manhattan infini (où, ainsi que dans beaucoup de villes américaines, les rues se croisent à angle droit). Elles effectuent chacune une marche aléatoire dans le réseau formé par les rues. Elles sont parties du même endroit, et nous voulons déterminer la probabilité p_n qu'elles parcourent des chemins qui ne se coupent pas. Dans cet exemple, n ne désigne pas le nombre de pas effectués par les marcheurs, mais le nombre de carrefours traversés. Au bout d'un temps infiniment long, leurs chemins se croisent obligatoirement : la probabilité de non-intersection tend vers zéro quand les trajets parcourus sont infiniment longs. La question est de savoir à quelle vitesse.

Michael Aizenman, chercheur à la double casquette de physicien théoricien et de mathématicien, a promis en 1984 une bouteille de vin français millésimée d'une grande année à qui déterminerait cette probabilité. En 1988, B. Duplantier et K.H. Kwon prédirent que la probabilité décroissait comme $n^{-5/8}$. Avec G. Lawler et O. Schramm, nous avons démontré récemment cette prédiction. Il est à noter que la preuve mathématique utilise des outils différents des arguments de la physique théorique, tels que le mouvement brownien, l'analyse complexe et l'invariance conforme. Ce résultat ne dépend pas du réseau utilisé, carré ou hexagonal.

Le chemin auto-évitant, enveloppe du brownien

L'étude des exposants d'intersection des marches aléatoires est plus accessible mathématiquement que celle des chemins auto-évitants car lorsque n croît vers l'infini, on sait décrire un objet aléatoire vers lequel la marche aléatoire converge : le mouvement brownien (voir la figure 5). Nous pouvons ainsi relier les exposants à certaines propriétés de la trajectoire brownienne plane. En particulier, la détermination d'un exposant dit de disconnexion prouve la conjecture formulée par Benoît Mandelbrot au début des années 1980, qui devina, dans l'enveloppe d'une trajectoire brownienne, un chemin auto-évitant.

Faisons évoluer une trajectoire brownienne dans un plan et attendons qu'elle repasse près de son point de départ (cela



6. LA BOUTEILLE DE VIN mise en jeu en 1984 par Michael Aizenman pour la détermination de la probabilité de non-intersection de deux marches aléatoires. Cette bouteille a été débouchée en 2001, à l'occasion d'un congrès pour célébrer la formule $\xi(1,1) = 5/4$. On reconnaît les signatures, dans l'ordre des aiguilles d'une montre à partir d'en haut à gauche, de B. Duplantier, G. Lawler, W. Werner, M. Aizenman et O. Schramm.

peut être long, mais soyons patients, ça finira par arriver). Cette courbe (voir la figure 1), puisqu'elle est presque fermée, définit une surface. Traçons-en le contour en gras. B. Mandelbrot fit une analogie entre ce contour et les chemins auto-évitants et prédit que les deux types de courbes partagent la même dimension fractale, c'est-à-dire $4/3$ (on avait déjà conjecturé que la dimension fractale des chemins auto-évitants était $4/3$). En 1998, à partir de certains résultats que nous avons obtenus avec G. Lawler, B. Duplantier a utilisé le formalisme dit de «gravité quantique» (formalisme destiné à comprendre comment la gravité se comporte à petite échelle) pour donner une justification physique à la conjecture de B. Mandelbrot et à celle de l'exposant de non-intersection des marches aléatoires. En 2000, avec G. Lawler et O. Schramm, nous publions une démonstration mathématique de ce résultat.

Nous avons également démontré que, localement, le contour brownien ressemble à s'y méprendre à la seule limite possible des longs chemins auto-évitants que nous avions évoquée plus haut. Ceci peut paraître surprenant : le contour brownien est la frontière extérieure d'une surface. Regardons une carte de la Bretagne où

n'apparaîtraient que les contours de la côte. Grâce au dessin des embouchures des fleuves, nous serions en mesure, pour n'importe quel point de la côte, de préciser de quel côté du tracé se trouvent le continent et la mer. On pourrait penser qu'il en est de même pour le contour brownien et qu'il est possible, en observant une partie de celui-ci, de deviner de quel côté se situe la trajectoire brownienne. Puisqu'un chemin auto-évitant a exactement le même aspect vu d'un côté ou de l'autre, notre résultat montre que le contour brownien possède cette propriété de symétrie.

Notons avant de conclure que cette courbe auto-évitante fractale construite avec G. Lawler et O. Schramm peut être interprétée comme la manière naturelle de choisir au hasard parmi toutes les possibilités un chemin auto-évitant dans le plan. Cette courbe jouerait le même rôle vis-à-vis des chemins auto-évitants que le mouvement brownien vis-à-vis des marches aléatoires.

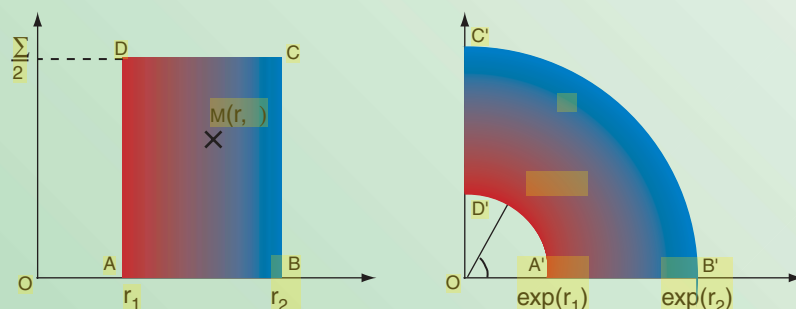
Les chemins auto-évitants, aussi simple soit leur construction, cachent, du point de vue de la physique théorique et du point de vue mathématique, des problèmes profonds dont les solutions utilisent des arguments assez élaborés issus de domaines aussi

7. LES TRANSFORMATIONS CONFORMES

Une transformation d'une partie du plan dans une autre qui conserve les angles est nommée une transformation conforme. Des exemples simples sont la translation ou l'homothétie. En voici un autre. Prenons un rectangle délimité dans le plan par les points $A(r_1, 0)$, $B(r_2, 0)$, $C(r_2, \pi/2)$ et $D(r_1, \pi/2)$. À chaque point $M(r, \theta)$ de ce rectangle, associons un point M' situé à distance $\exp(r)$ de l'origine O du repère et tel que la droite (OM') fasse un angle θ avec l'axe des abscisses. L'image du rectangle est un quart de couronne comprise entre les cercles de rayon $\exp(r_1)$ et $\exp(r_2)$. Cette application est une transformation conforme : l'image d'une intersection orthogonale (celle entre les segments AB et AD) est une intersection orthogonale (l'arc de cercle $A'D'$ croise avec un angle droit le segment $A'B'$). D'après un théorème dit de Riemann, il existe toujours une transformation conforme qui relie deux domaines quelconques du plan.

On peut noter que l'exemple précédent s'interprète en termes de nombres complexes. En écrivant M sous la forme du nombre complexe z égal à $r + i\theta$, l'image de M , M' , est située au nombre complexe z' égal à l'exponentielle de z : $\exp(z)$. Ce lien entre les transformations conformes et les fonctions complexes rend d'une certaine façon les problèmes à deux dimensions plus féconds qu'en dimension supérieure (les exposants de non-intersection associés aux chemins auto-évitant dans l'espace ne sont pas *a priori* des nombres remarquables).

Les transformations conformes sont utiles pour déterminer les propriétés du mouvement brownien. Par exemple, on évalue la probabilités de non-intersection entre deux trajectoires browniennes en projetant par transformation conforme les zones non explorées par une des trajectoires sur un domaine à la géométrie plus simple grâce au théorème de Riemann.



EXEMPLE DE TRANSFORMATION CONFORME. L'image d'un point $M(r, \theta)$ est un point M' situé à la distance $\exp(r)$ de l'origine et pour lequel la droite (OM') fait un angle θ avec l'axe des abscisses.

variés que la théorie des transitions de phase, la gravité quantique ou encore la théorie conforme des champs. Bien que physiciens et mathématiciens traitent les mêmes problèmes, leur manière de les résoudre diffère. De nombreux résultats admis en physique théorique sont des problèmes ouverts en mathématiques. Cependant, l'interaction entre les idées et les résultats des mathé-

maticiens et des physiciens théoriciens a été extrêmement fructueuse pour les deux disciplines lors de ces dernières années, et c'est dans cet esprit que nous avons débouché avec B. Duplantier, O. Schramm et G. Lawler, à l'occasion d'un congrès en 2001 réunissant mathématiciens et physiciens, le cru mis en jeu par M. Aizenman pour la détermination des exposants d'intersection.

Wendelin WERNER est professeur à l'Université Paris-Sud et membre du Département de mathématiques d'Orsay. Nous remercions B. Duplantier pour l'aide amicale qu'il nous a apportée.

G. F. LAWLER, *Intersections of Random*

Walks, éditions Birkhauser-Boston, 1996.

N. MADRAS, G. SLADE, *The Self-Avoiding Walk*, éd. Birkhauser-Boston, 1996.

CARLO VANDERZANDE, *Lattice Models of Polymers*, Cambridge University Press, 1998.