

5. LES FORMULES «MAGIQUES»

Comment déterminer les sommes des lignes, colonnes et diagonales des carrés multimagiques ?

Un carré magique de côté n contient tous les nombres de 1 à n^2 .

Commençons par la magie simple. Il est connu que la somme des premiers nombres entiers de 1 à N est : $N(N+1)/2$. La somme des premiers nombres entiers de 1 à n^2 est donc : $n^2(n^2+1)/2$

Puisqu'il y a n lignes à ce carré, il suffit de diviser par n pour savoir ce que doit être la somme magique S_1 de chaque ligne, colonne ou diagonale, soit $S_1 = n(n^2+1)/2$

Pour la bimagic, la somme des carrés des premiers nombres entiers de 1 à n^2 est $n^2(n^2+1)(2n^2+1)/6$. En divisant par n , nous obtenons la somme S_2 de chaque ligne, colonne ou diagonale, soit donc $S_2 = n(n^2+1)(2n^2+1)/6$ ou encore $S_2 = (2n^3+n)/3$. Pour la trimagic, la somme des cubes est $S_3 = n \times S_1^2$

Pour la tétramagic, Fermat donnait, dès 1636, dans une lettre envoyée à Roberval, la solution de la somme des entiers de 1 à N élevés à la puissance 4.

Voici la formule de Fermat après avoir remplacé N par n^2 , puis divisé par n :

$S_4 = ((4n^2 + 2) \times n \times S_1^2 - S_2) / 5$. En remplaçant $(4n^2 + 2) \times S_1$ par $6S_2$, on peut écrire, plus simplement que Fermat : $S_4 = S_2 \times (6n \times S_1 - 1) / 5$.

Pour la pentamagic (somme des puissances 5) : $S_5 = (3n \times S_2^2 - S_3) / 2$.

Si l'on préfère développer S_p , cela donne le tableau suivant, tableau généreux puisqu'il permet de calculer jusqu'aux sommes des records futurs, les carrés hexa, hepta et octomagiques :

$$\begin{aligned} S_1 &= (1/2) n^3 + (1/2) n \\ S_2 &= (1/3) n^5 + (1/2) n^3 + (1/6) n \\ S_3 &= (1/4) n^7 + (1/2) n^5 + (1/4) n^3 \\ S_4 &= (1/5) n^9 + (1/2) n^7 + (1/3) n^5 - (1/30) n \\ S_5 &= (1/6) n^{11} + (1/2) n^9 + (5/12) n^7 - (1/12) n^3 \\ S_6 &= (1/7) n^{13} + (1/2) n^{11} + (1/2) n^9 - (1/6) n^5 + (1/42) n \\ S_7 &= (1/8) n^{15} + (1/2) n^{13} + (7/12) n^{11} - (7/24) n^7 + (1/12) n^3 \\ S_8 &= (1/9) n^{17} + (1/2) n^{15} + (2/3) n^{13} - (7/15) n^9 + (2/9) n^5 - (1/30) n \end{aligned}$$

Pour calculer S_p lorsque le carré p -magique de côté n contient les nombres de 0 à $n^2 - 1$ (au lieu des nombres de 1 à n^2), il faut mettre le signe - au lieu du signe + de la deuxième colonne.

Vous remarquerez que la 1ère colonne de S_p est égale à $1/(p+1) \times n^{2p+1}$. Cette particularité est connue depuis le milieu du XVIII^e siècle, grâce à Pascal. Jacques Bernoulli s'intéressa ensuite à cette question de la somme des puissances d'entiers, et depuis son *Ars conjectandi* paru après sa mort début XVIII^e, les nombres utilisés dans ce développement s'appellent maintenant nombres de Bernoulli (1/6, -1/30, 1/42, -1/30, 5/66, ...).

Voici ce que donnent ces formules pour quelques tailles de carrés $A \times A$:

	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8	9 x 9	32 x 32
S_1	15	34	65	111	175	260	369	16400
S_2	95	374	1105	2701	5775	11180	20049	11201200
S_3	675	4624	21125	73926	214375	540800	1225449	8606720000

Sur les sommes ci-dessus (S_p) d'un carré p -magique de côté n , contenant les nombres de 1 à n^2 , on retrouve les sommes du carré bimagique 8x8 de Pfeffermann et trimagique 32x32 de William Benson.

	32 x 32	512 x 512	1024 x 1024
S_1	16368	67108608	536870400
S_2	11168432	11728056920832	375299432076800
S_3	8573165568	2305825417061203968	295147342229667840000
S_4	7019705733392	483565716171561366524160	247587417561640996243120640
S_5	5987221633671168	105636341097042573844228866048	216345083469423421673932062720000

Avec ces sommes S_p d'un carré p -magique de côté n , contenant les nombres de 0 à $n^2 - 1$, on retrouve les sommes des 2 carrés tétramagique 512x512 et pentamagique 1024x1024 de l'article. Pour plus de détails sur les sommes des puissances, voir le chapitre 14 *Sommation des puissances numériques*, livre II de la *Théorie des Nombres* d'Edouard Lucas, Librairie Blanchard.

cule à la main et le publie intégralement à la fin de son impressionnant livre *Les Carrés Magiques au Degré n*. Notre général pensait alors – à tort – qu'il ne pouvait en exister de plus petits.

Le premier carré trimagique 32 x 32 connu est dû à l'américain William Benson. Même s'il est plus petit que celui du général Cazalas, il est toujours un peu trop grand pour être publié ici et nous n'en donnerons ici que les coins (figure 2a) : les sommes des carrés des lignes, colonnes et diagonales sont 11 201 200 (Benson avait utilisé un ordinateur IBM pour ses calculs). Les sommes des cubes des lignes, colonnes et diagonales sont 8 606 720 000. La totalité de ce carré a été publiée pour la première fois en 1976 dans le livre *New recreations with Magic Squares* (pages 86-87) de W. Benson et O. Jacoby, consultable sur le site Internet de Pour la Science. On en retrouve une copie intégrale dans le récent livre *Les carrés magiques* (page 146) de René Descombes ; on ne sait pas aujourd'hui si il existe des carrés trimagiques de taille inférieure à 32 x 32.

CARRÉS TÉTRAMAGIQUE ET PENTAMAGIQUE

Personne à notre connaissance n'a encore été au-delà de la trimagic. Serait-il impossible de construire des carrés dont la magie va jusqu'à la puissance 4, voire 5 ?

En étudiant une méthode de construction de carrés trimagiques 32x32 due à André Viricel, donc construisant des carrés de même taille que celui de William Benson, j'ai essayé d'aller au-delà pour construire des carrés tétramagiques (...si l'on aime le grec) ou quadrimagiques (...si l'on préfère le latin).

Après avoir essayé sans succès sur des carrés de côté 32, 64 et 128, j'ai pu construire des carrés de côté 256 tétramagiques pour les lignes et colonnes, mais dont, hélas, les diagonales restaient obstinément trimagiques «seulement».

Je suis donc ensuite monté à la taille 512, et là, gagné, c'est le bonheur, j'ai obtenu les premiers carrés entièrement tétramagiques ! En avant-première mondiale (soyons pompeux), les coins du premier carré tétramagique sont indiqués sur la figure 2b, le carré total étant consultable sur le site Internet de Pour la Science.

Attention, il utilise les nombres de 0 à $512^2 - 1 = 262\,143$. Si vous préférez les carrés classiques commençant par 1, il suffit de rajouter 1 à chaque cellule... cela modifie bien sûr les sommes, mais le carré est toujours tétramagique.

C'est un carré vraiment monstrueux ..., avec ses 262 144 cellules. Ce carré tétramagique se permet même d'avoir une caractéristique supplémentaire : ses