

5. LES FORMULES «MAGIQUES»

Comment déterminer les sommes des lignes, colonnes et diagonales des carrés multimagiques ?

Un carré magique de côté n contient tous les nombres de 1 à n^2 .

Commençons par la magie simple. Il est connu que la somme des premiers nombres entiers de 1 à N est : $N(N+1)/2$. La somme des premiers nombres entiers de 1 à n^2 est donc : $n^2(n^2+1)/2$

Puisqu'il y a n lignes à ce carré, il suffit de diviser par n pour savoir ce que doit être la somme magique S_1 de chaque ligne, colonne ou diagonale, soit $S_1 = n(n^2+1)/2$

Pour la bimagic, la somme des carrés des premiers nombres entiers de 1 à n^2 est $n^2(n^2+1)(2n^2+1)/6$. En divisant par n , nous obtenons la somme S_2 de chaque ligne, colonne ou diagonale, soit donc $S_2 = n(n^2+1)(2n^2+1)/6$ ou encore $S_2 = (2n^3+n)/3$. Pour la trimagic, la somme des cubes est $S_3 = n \times S_1^2$

Pour la tétramagic, Fermat donnait, dès 1636, dans une lettre envoyée à Roberval, la solution de la somme des entiers de 1 à N élevés à la puissance 4. Voici la formule de Fermat après avoir remplacé N par n^2 , puis divisé par n :

$S_4 = ((4n^2 + 2) \times n \times S_1^2 - S_2) / 5$. En remplaçant $(4n^2 + 2) \times S_1$ par $6S_2$, on peut écrire, plus simplement que Fermat : $S_4 = S_2 \times (6n \times S_1 - 1) / 5$.

Pour la pentamagic (somme des puissances 5) : $S_5 = (3n \times S_2^2 - S_3) / 2$.

Si l'on préfère développer S_p , cela donne le tableau suivant, tableau généreux puisqu'il permet de calculer jusqu'aux sommes des records futurs, les carrés hexa, hepta et octomagiques :

$$\begin{aligned} S_1 &= (1/2) n^3 + (1/2) n \\ S_2 &= (1/3) n^5 + (1/2) n^3 + (1/6) n \\ S_3 &= (1/4) n^7 + (1/2) n^5 + (1/4) n^3 \\ S_4 &= (1/5) n^9 + (1/2) n^7 + (1/3) n^5 - (1/30) n \\ S_5 &= (1/6) n^{11} + (1/2) n^9 + (5/12) n^7 - (1/12) n^3 \\ S_6 &= (1/7) n^{13} + (1/2) n^{11} + (1/2) n^9 - (1/6) n^5 + (1/42) n \\ S_7 &= (1/8) n^{15} + (1/2) n^{13} + (7/12) n^{11} - (7/24) n^7 + (1/12) n^3 \\ S_8 &= (1/9) n^{17} + (1/2) n^{15} + (2/3) n^{13} - (7/15) n^9 + (2/9) n^5 - (1/30) n \end{aligned}$$

Pour calculer S_p lorsque le carré p -magique de côté n contient les nombres de 0 à $n^2 - 1$ (au lieu des nombres de 1 à n^2), il faut mettre le signe - au lieu du signe + de la deuxième colonne.

Vous remarquerez que la 1ère colonne de S_p est égale à $1/(p+1) \times n^{2p+1}$. Cette particularité est connue depuis le milieu du XVIII^e siècle, grâce à Pascal. Jacques Bernoulli s'intéressa ensuite à cette question de la somme des puissances d'entiers, et depuis son *Ars conjectandi* paru après sa mort début XVIII^e, les nombres utilisés dans ce développement s'appellent maintenant nombres de Bernoulli (1/6, -1/30, 1/42, -1/30, 5/66, ...).

Voici ce que donnent ces formules pour quelques tailles de carrés $A \times A$:

	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8	9 x 9	32 x 32
S_1	15	34	65	111	175	260	369	16400
S_2	95	374	1105	2701	5775	11180	20049	11201200
S_3	675	4624	21125	73926	214375	540800	1225449	8606720000

Sur les sommes ci-dessus (S_p) d'un carré p -magique de côté n , contenant les nombres de 1 à n^2 , on retrouve les sommes du carré bimagic 8x8 de Pfeffermann et trimagique 32x32 de William Benson.

	32 x 32	512 x 512	1024 x 1024
S_1	16368	67108608	536870400
S_2	11168432	11728056920832	375299432076800
S_3	8573165568	2305825417061203968	295147342229667840000
S_4	7019705733392	483565716171561366524160	247587417561640996243120640
S_5	5987221633671168	105636341097042573844228866048	216345083469423421673932062720000

Avec ces sommes S_p d'un carré p -magique de côté n , contenant les nombres de 0 à $n^2 - 1$, on retrouve les sommes des 2 carrés tétramagique 512x512 et pentamagique 1024x1024 de l'article. Pour plus de détails sur les sommes des puissances, voir le chapitre 14 *Sommation des puissances numériques*, livre II de la *Théorie des Nombres* d'Edouard Lucas, Librairie Blanchard.

cule à la main et le publie intégralement à la fin de son impressionnant livre *Les Carrés Magiques au Degré n*. Notre général pensait alors – à tort – qu'il ne pouvait en exister de plus petits.

Le premier carré trimagique 32 x 32 connu est dû à l'américain William Benson. Même s'il est plus petit que celui du général Cazalas, il est toujours un peu trop grand pour être publié ici et nous n'en donnerons ici que les coins (figure 2a) : les sommes des carrés des lignes, colonnes et diagonales sont 11 201 200 (Benson avait utilisé un ordinateur IBM pour ses calculs). Les sommes des cubes des lignes, colonnes et diagonales sont 8 606 720 000. La totalité de ce carré a été publiée pour la première fois en 1976 dans le livre *New recreations with Magic Squares* (pages 86-87) de W. Benson et O. Jacoby, consultable sur le site Internet de Pour la Science. On en retrouve une copie intégrale dans le récent livre *Les carrés magiques* (page 146) de René Descombes ; on ne sait pas aujourd'hui si il existe des carrés trimagiques de taille inférieure à 32 x 32.

CARRÉS TÉTRAMAGIQUE ET PENTAMAGIQUE

Personne à notre connaissance n'a encore été au-delà de la trimagic. Serait-il impossible de construire des carrés dont la magie va jusqu'à la puissance 4, voire 5 ?

En étudiant une méthode de construction de carrés trimagiques 32x32 due à André Viricel, donc construisant des carrés de même taille que celui de William Benson, j'ai essayé d'aller au-delà pour construire des carrés tétramagiques (...si l'on aime le grec) ou quadrimagiques (...si l'on préfère le latin).

Après avoir essayé sans succès sur des carrés de côté 32, 64 et 128, j'ai pu construire des carrés de côté 256 tétramagiques pour les lignes et colonnes, mais dont, hélas, les diagonales restaient obstinément trimagiques «seulement».

Je suis donc ensuite monté à la taille 512, et là, gagné, c'est le bonheur, j'ai obtenu les premiers carrés entièrement tétramagiques ! En avant-première mondiale (soyons pompeux), les coins du premier carré tétramagique sont indiqués sur la figure 2b, le carré total étant consultable sur le site Internet de Pour la Science.

Attention, il utilise les nombres de 0 à $512^2 - 1 = 262\,143$. Si vous préférez les carrés classiques commençant par 1, il suffit de rajouter 1 à chaque cellule... cela modifie bien sûr les sommes, mais le carré est toujours tétramagique.

C'est un carré vraiment monstrueux ..., avec ses 262 144 cellules. Ce carré tétramagique se permet même d'avoir une caractéristique supplémentaire : ses

512 lignes sont pentamagiques, donc jusqu'à la puissance 5. Alors, pourquoi s'arrêter en si bon chemin? Les carrés pentamagiques ne doivent pas être loin.

Bingo! La méthode, appliquée aux carrés de taille 1024×1024 permet de trouver des carrés pentamagiques! Les coins du carré pentamagique découvert sont indiqués sur la figure 5. La méthode employée est indiquée ci-contre.

VÉRIFICATIONS

J'entends déjà l'objection : ces carrés sont-ils vraiment tétra et pentamagique? Étant donnée la taille du carré, personne ne peut manuellement vérifier la véracité de l'affirmation. Cela ne peut se faire que par informatique. Et qui dit informatique, dit... bug possible! D'où le doute insidieux.

Les différentes vérifications ont été faites par des personnes indépendantes (par Christian Boyer, Enghien les Bains, UBasic / Yves Gallot, Toulouse, C et librairie Integer de Proth / Renaud Lifchitz, Paris, Mathematica / Olivier Ramare, Lille, MuPAD) dans des lieux différents et avec des outils distincts : ces carrés sont bel et bien tétra et pentamagiques!

Si vous voulez le vérifier vous-même, ils sont à votre disposition à l'adresse Internet <http://www.pourlascience.com>, mais attention, sous forme ASCII zippée, les fichiers font quand même 0,8 et 3,8 méga-octets! Et attention à votre programme de vérification! Il doit savoir calculer en multiprécision, S_5 , la somme magique du carré pentamagique, (voir la figure 5) étant de l'ordre de 2×10^{32} .

Et si vous, lecteur, étiez le prochain détenteur du record de multimagie? Peut-être saurez-vous trouver des carrés tétramagiques et pentamagiques plus petits, de côté inférieur respectivement à 512 et 1 024? Je suis persuadé que de tels carrés existent.

Je formule l'hypothèse que cette méthode continue à fonctionner, et doit permettre de trouver relativement facilement des carrés hexamagiques, heptamagiques, octomagiques, etc. jusqu'à un niveau quelconque de multimagie, en augmentant suffisamment la taille de carrés, et bien sûr à condition d'utiliser de bons moyens informatiques. Peut-être vérifieriez-vous cette hypothèse?

LE MYSTÈRE DU CARRÉ BIMAGIQUE 7X7

À côté de ces monstrueux carrés multimagiques, il est plaisant de s'arrêter sur le problème opposé, celui du plus petit carré multimagique possible. Il est facile de démontrer qu'aucun carré bimagique de côté inférieur ou égal à 5 ne peut exister. Il est plus difficile, mais faisable,

6. LA MÉTHODE UTILISÉE

Voici le secret utilisé pour obtenir ces carrés tétra et pentamagiques. Cette méthode est initialement due à André Viricel qui a aujourd'hui 88 ans, et qui garde toujours un esprit aussi vif et acéré que lorsqu'il était professeur de mathématiques en activité.

André Viricel a initialement conçu cette méthode pour construire des carrés trimagiques 32×32 . Ma contribution a donc été modeste : j'ai eu simplement l'idée de la tester sur des niveaux supérieurs de multimagie, et sur des carrés de taille plus grande, et de l'implémenter informatiquement.

Voici la méthode qui vous permettra de calculer vous-même vos propres carrés multimagiques :

Démarrer par le coin haut gauche, en choisissant deux nombres N_1 et N_2 , différents et non nuls. Calculer la ligne 0 et la colonne 0, à l'aide de la multiplication numérale "@", puis calculer les autres lignes et colonnes, à l'aide de l'addition numérale "&" des éléments de la ligne 0 et de la colonne 0 : ces deux opérations sont détaillées plus bas.

	Col 0	Col 1	Col 2	...	Col i	...
Li 0	0 = (0,0)	$N_1 = (a,b)$	2 @ (a,b)	...	i @ (a,b) ...	...
Li 1	$N_2 = (c,d)$	(a,b) & (c,d)	2 @ (a,b) & (c,d)	...	i @ (a,b) & (c,d)	...
...	...	...	...	...	...	...
Li j	j @ (c,d)	(a,b) & j @ (c,d)	2 @ (a,b) & j @ (c,d)	...	i @ (a,b) & j @ (c,d)	...
...	...	...	...	...	...	...

La notation (a,b) indique un nombre décomposé dans la base n (n étant le côté du carré), a étant le quotient et b le reste. Prenons maintenant l'exemple de notre carré tétramagique (figure 2b). Regardons son coin haut gauche :

$$\begin{array}{r} 0 \quad 139938 \\ 140551 \quad 1957 \end{array}$$

$N_1 = 139938 = 273 \times 512$ (taille du carré) + 162 Donc (a,b) = (273,162)

$N_2 = 140551 = 274 \times 512$ (taille du carré) + 263 Donc (c,d) = (274,263)

Nous ne connaissons pas actuellement les règles exactes qui permettent de savoir si un couple N_1 et N_2 va engendrer un carré multimagique. Mais vous trouverez des couples autres que 139938/140551 qui donnent des carrés tétramagiques 512×512 : les plus petits sont 535/1103, 535/1145, etc...

Addition numérale &

Ce que l'on appelle ici l'addition numérale «&» est bien connue des informaticiens : il s'agit du OU EXCLUSIF, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$.

139938 = 100010001010100010 (en base 2)

140551 = 100010010100000111 (en base 2)

139938 & 140551 = 000000011110100101 (en base 2) = 1957 (en base 10) : 1957 est bien le nombre du tableau, sous le nombre 139938

Multiplication numérale @

Calculons l'avant-dernière cellule de la ligne 0 de notre carré tétramagique.

Elle vaut donc $510 @ (273,162)$. Commençons par calculer $510 @ 273$. $510 = 11111110$ (en base 2) et $273 = 100010001$ (en base 2)

La multiplication numérale se calcule comme la multiplication classique que l'on apprend à l'école, sauf que l'addition finale effectuée n'est pas classique, mais numérale (donc « ou exclusif » binaire). Cela donne :

$$\begin{array}{r} 11111110 \\ @ 100010001 \\ \hline 111111110 \\ \& 111111110 \dots \\ \hline \& 111111110 \dots \\ = 111100001000011110 \end{array}$$

Pour conclure la multiplication et afin que le résultat reste de la même taille que ses deux opérands (inférieurs à 512), on effectue une addition numérale supplémentaire des parties droite et gauche du résultat, soit donc : $000011110 + 011110000 = 011101110$

Le résultat de $510 @ 273$ est donc 11101110 en base 2, soit 238 en base 10.

Si, par la même méthode, on calcule $510 @ 162$, on trouvera 349.

Le résultat de $510 @ (273,162)$ est donc $(238,349) = 238 \times 512 + 349 = 122205$.

Dans le coin haut droit de notre carré tétramagique, on retrouve bien ce nombre dans l'avant-dernière cellule de la ligne 0 (figure 2b) :

$$\begin{array}{r} 122205 \quad 262143 \\ 260186 \quad 121592 \end{array}$$