

512 lignes sont pentamagiques, donc jusqu'à la puissance 5. Alors, pourquoi s'arrêter en si bon chemin? Les carrés pentamagiques ne doivent pas être loin.

Bingo! La méthode, appliquée aux carrés de taille 1024×1024 permet de trouver des carrés pentamagiques! Les coins du carré pentamagique découvert sont indiqués sur la figure 5. La méthode employée est indiquée ci-contre.

VÉRIFICATIONS

J'entends déjà l'objection : ces carrés sont-ils vraiment tétra et pentamagique? Étant donnée la taille du carré, personne ne peut manuellement vérifier la véracité de l'affirmation. Cela ne peut se faire que par informatique. Et qui dit informatique, dit... bug possible! D'où le doute insidieux.

Les différentes vérifications ont été faites par des personnes indépendantes (par Christian Boyer, Enghien les Bains, UBasic / Yves Gallot, Toulouse, C et librairie Integer de Proth / Renaud Lifchitz, Paris, Mathematica / Olivier Ramare, Lille, MuPAD) dans des lieux différents et avec des outils distincts : ces carrés sont bel et bien tétra et pentamagiques!

Si vous voulez le vérifier vous-même, ils sont à votre disposition à l'adresse Internet <http://www.pourlascience.com>, mais attention, sous forme ASCII zippée, les fichiers font quand même 0,8 et 3,8 méga-octets! Et attention à votre programme de vérification! Il doit savoir calculer en multiprécision, S_5 , la somme magique du carré pentamagique, (voir la figure 5) étant de l'ordre de 2×10^{32} .

Et si vous, lecteur, étiez le prochain détenteur du record de multimagie? Peut-être saurez-vous trouver des carrés tétramagiques et pentamagiques plus petits, de côté inférieur respectivement à 512 et 1 024? Je suis persuadé que de tels carrés existent.

Je formule l'hypothèse que cette méthode continue à fonctionner, et doit permettre de trouver relativement facilement des carrés hexamagiques, heptamagiques, octomagiques, etc. jusqu'à un niveau quelconque de multimagie, en augmentant suffisamment la taille de carrés, et bien sûr à condition d'utiliser de bons moyens informatiques. Peut-être vérifieriez-vous cette hypothèse?

LE MYSTÈRE DU CARRÉ BIMAGIQUE 7X7

À côté de ces monstrueux carrés multimagiques, il est plaisant de s'arrêter sur le problème opposé, celui du plus petit carré multimagique possible. Il est facile de démontrer qu'aucun carré bimagique de côté inférieur ou égal à 5 ne peut exister. Il est plus difficile, mais faisable,

6. LA MÉTHODE UTILISÉE

Voici le secret utilisé pour obtenir ces carrés tétra et pentamagiques. Cette méthode est initialement due à André Viricel qui a aujourd'hui 88 ans, et qui garde toujours un esprit aussi vif et acéré que lorsqu'il était professeur de mathématiques en activité.

André Viricel a initialement conçu cette méthode pour construire des carrés trimagiques 32×32 . Ma contribution a donc été modeste : j'ai eu simplement l'idée de la tester sur des niveaux supérieurs de multimagie, et sur des carrés de taille plus grande, et de l'implémenter informatiquement.

Voici la méthode qui vous permettra de calculer vous-même vos propres carrés multimagiques :

Démarrer par le coin haut gauche, en choisissant deux nombres N_1 et N_2 , différents et non nuls. Calculer la ligne 0 et la colonne 0, à l'aide de la multiplication numérale "@", puis calculer les autres lignes et colonnes, à l'aide de l'addition numérale "&" des éléments de la ligne 0 et de la colonne 0 : ces deux opérations sont détaillées plus bas.

	Col 0	Col 1	Col 2	...	Col i	...
Li 0	$0 = (0,0)$	$N_1 = (a,b)$	$2 @ (a,b)$	...	$i @ (a,b)$	...
Li 1	$N_2 = (c,d)$	$(a,b) \& (c,d)$	$2 @ (a,b) \& (c,d)$	...	$i @ (a,b) \& (c,d)$	...
...	...	...	...	...	...	...
Li j	$j @ (c,d)$	$(a,b) \& j @ (c,d)$	$2 @ (a,b) \& j @ (c,d)$	...	$i @ (a,b) \& j @ (c,d)$	...
...	...	...	...	...	...	...

La notation (a,b) indique un nombre décomposé dans la base n (n étant le côté du carré), a étant le quotient et b le reste. Prenons maintenant l'exemple de notre carré tétramagique (figure 2b). Regardons son coin haut gauche :

$$\begin{array}{r} 0 \quad 139938 \\ 140551 \quad 1957 \end{array}$$

$N_1 = 139938 = 273 \times 512$ (taille du carré) + 162 Donc $(a,b) = (273,162)$

$N_2 = 140551 = 274 \times 512$ (taille du carré) + 263 Donc $(c,d) = (274,263)$

Nous ne connaissons pas actuellement les règles exactes qui permettent de savoir si un couple N_1 et N_2 va engendrer un carré multimagique. Mais vous trouverez des couples autres que 139938/140551 qui donnent des carrés tétramagiques 512×512 : les plus petits sont 535/1103, 535/1145, etc...

Addition numérale &

Ce que l'on appelle ici l'addition numérale «&» est bien connue des informaticiens : il s'agit du OU EXCLUSIF, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$.

$139938 = 100010001010100010$ (en base 2)

$140551 = 100010010100000111$ (en base 2)

$139938 \& 140551 = 000000011110100101$ (en base 2) = 1957 (en base 10) : 1957 est bien le nombre du tableau, sous le nombre 139938

Multiplication numérale @

Calculons l'avant-dernière cellule de la ligne 0 de notre carré tétramagique.

Elle vaut donc $510 @ (273,162)$. Commençons par calculer $510 @ 273$. $510 = 11111110$ (en base 2) et $273 = 100010001$ (en base 2)

La multiplication numérale se calcule comme la multiplication classique que l'on apprend à l'école, sauf que l'addition finale effectuée n'est pas classique, mais numérale (donc « ou exclusif » binaire). Cela donne :

$$\begin{array}{r} 11111110 \\ @ 100010001 \\ \hline 111111110 \\ \& 111111110 \dots \\ \hline \& 111111110 \dots \\ = 111100001000011110 \end{array}$$

Pour conclure la multiplication et afin que le résultat reste de la même taille que ses deux opérands (inférieurs à 512), on effectue une addition numérale supplémentaire des parties droite et gauche du résultat, soit donc : $000011110 \& 011110000 = 011101110$

Le résultat de $510 @ 273$ est donc 11101110 en base 2, soit 238 en base 10.

Si, par la même méthode, on calcule $510 @ 162$, on trouvera 349.

Le résultat de $510 @ (273,162)$ est donc $(238,349) = 238 \times 512 + 349 = 122205$.

Dans le coin haut droit de notre carré tétramagique, on retrouve bien ce nombre dans l'avant-dernière cellule de la ligne 0 (figure 2b) :

$$\begin{array}{r} 122205 \quad 262143 \\ 260186 \quad 121592 \end{array}$$

de démontrer qu'aucun carré bimagique de côté 6 ne peut exister.

Pour un éventuel carré bimagique de côté 7, la question est encore aujourd'hui réputée ouverte. Démarrons le raisonnement.

Dans un carré 7 x 7, il y a 49 cases. Il faut donc caser les nombres de 1 à 49, soit donc 25 impairs et 24 pairs. La somme S_1 des éléments d'une rangée d'un tel carré doit être égale à $7 \times (49 + 1)/2$, soit 175.

La somme S_2 des carrés des éléments d'une rangée doit être égale à $7 \times (49 + 1) \times (2 \times 49 + 1)/6 = 5775$, qui est de la forme $4k + 3$.

Les carrés des nombres pairs étant de la forme $4k$, et les carrés des nombres impairs étant de la forme $4k + 1$, une somme de 7 carrés ne peut faire $4k + 3$ que si la rangée contient 3 ou 7 nombres impairs.

Pour caser 25 impairs sur 7 rangées, la seule possibilité est donc d'avoir : 6 rangées à 3 impairs et 1 rangée à 7 impairs. D'où la question majeure : existe-t-il des groupes de 7 nombres impairs distincts, compris entre 1 et 49, dont la somme fait 175 et la somme des carrés fait 5 775 ?

En 1892, Michel Frolov, dans le bulletin de la renommée Société Mathématique de France, affirmait qu'il n'existe aucun de ces groupes : il en conclut qu'aucun carré bimagique 7 x 7 ne peut exister. Erreur, Monsieur Frolov ! Mais nous lui pardonnerons, car l'informatique n'existe pas encore à son époque.

Nous avons trouvé exactement 60 groupes ayant ces propriétés, comme par exemple :

$$G_1 = 49, 43, 25, 19, 17, 13, 9$$

$$G_2 = 49, 41, 29, 19, 17, 11, 9$$

...

$$G_{13} = 49, 33, 31, 25, 23, 13, 1$$

...

$$G_{60} = 41, 37, 33, 31, 25, 7, 1$$

Pour constituer une ligne et une colonne d'un tel carré, il suffit qu'il existe au moins un couple de 2 parmi ces 60 groupes ayant un et un seul élément commun.

Si nos calculs sont justes, il y a exactement 424 couples possibles parmi ces groupes de 7 impairs. Par exemple les groupes G_2 , G_{13} cités ci-dessus ont en

17	29	11	19	41	49	9
36	44	7	38	5	25	20
37	3	34	18	8	33	12
15	45	30	14	46	13	12
6	2	43	35	26	31	32
16	28	40	47	22	1	21
48	24	10	4	27	23	39

7. Un carré «quasi» bimagique 7x7 obtenu avec G_2 et G_{13} . Je vous défie de trouver mieux !

commun le seul nombre 49 : le nombre 49 sera alors l'intersection ligne/colonne du couple G_2/G_{13} .

Si on ne se limite pas aux nombres impairs, il existe 1 844 groupes de nombres distincts, pairs ou impairs, compris entre 1 et 49, dont la somme fait 175 et la somme des carrés fait 5 775.

Cette liste a été publiée dès 1909 par Achille Rilly dans Sphinx - dipe. Sans informatique, saluons l'exploit !

Il est possible de construire un programme informatique qui, à partir de ces 424 couples, puis en puisant parmi les 1 844 groupes, essaye de construire un carré bimagique. Sauf erreur de programmation de ma part, j'affirme qu'un tel carré bimagique 7 x 7 n'existe pas.

Mais... voici toutefois (figure 7) un exemple de carré de côté 7 que j'ai obtenu, justement à partir du couple d'impairs G_2 / G_{13} présent en 1^{re} ligne / 6^e colonne.

Est-il magique ? Est-il bimagique ? Ce carré 7 x 7 est «quasi» bimagique. Où sont ses failles ? Mon défi : trouverez-vous mieux ?

Je vous laisse prendre votre calculatrice, ou votre tableur, et tapoter. J'affirme, sans preuve mathématique, qu'il est impossible de faire mieux. Mais peut-être est-ce faux ?

Peut-être saurez-vous approcher de plus près la bimagie de côté 7 ? Ou même, éventuellement, infirmer ce que j'annonce, et prouver, tout simplement en le trouvant, que le mythique carré bimagique de côté 7 existe bel et bien ?

Christian BOYER est consultant en informatique : cboyer@club-internet.fr. Il remercie Yves Roussel de l'ADCS et Jacques Bouteloup pour leur aide.

La Mathématique des Jeux ou Récréations Mathématiques, par Maurice Kraitchik, Stevens Frères, Bruxelles, 1930.

Carrés Magiques au Degré n, par le Général E. Cazalas, Hermann, Paris, 1934.

New Recreations with Magic Squares, par William Benson & Oswald Jacoby, Dover Publications, New York, 1976.

Carrés Magiques Carrés Latins et Eulériens, par Jacques Bouteloup, Éditions du Choix, 1991 (cet éditeur est maintenant situé à Marseille).

Les Carrés Magiques, par René Descombes Vuibert, Paris, 2000.