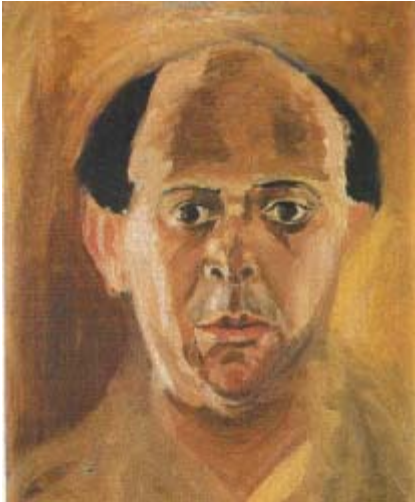




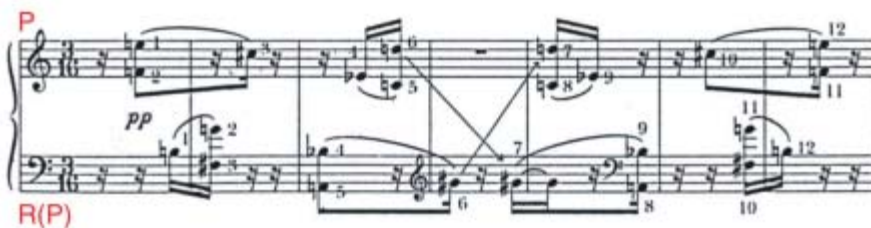
Mathématiques dodécaphoniques

CARLOTA SIMOES

Les mathématiques aident à analyser les règles strictes de la musique dodécaphonique.

Depuis Pythagore, mathématiques et musique sont sœurs jumelles. La musique du xx^e siècle n'échappe pas à l'inspiration mathématique, notamment la musique dodécaphonique ; cette musique a été créée en 1923 par Arnold von Schoenberg (1874-1951) – son autoportrait est à côté du titre –, et adoptée par ses deux élèves Alban Berg (1885-1935) et Anton Webern (1883-1945). Les trois compositeurs étaient intellectuellement «à l'unisson», aussi leur association a été nommée la *Seconde école viennoise de musique*, après celle de Haydn, Mozart et Beethoven.

Les règles de composition de cette musique sont formalisables et la mathématique facilite l'analyse des œuvres du trio viennois. La musique dodécaphonique se distingue de la musique tonale où une des sept notes de la gamme diatonique (*do, ré, mi, fa, sol, la, si, do*) prédomine sur les autres. Le plus souvent, il s'agit de la cinquième note (ici, *sol*) de la gamme choisie par le compositeur pour marquer la



2. LES VARIATIONS POUR PIANO, OPUS 27, de Webern, utilisent une série P (en haut) et la série rétrograde R(P) (en bas). Ces deux séries se combinent, c'est-à-dire que les six premières notes de P, jouées par la main droite, et les six premières notes de R(P), jouées par la main gauche, forment une série complète des 12 notes de la gamme chromatique. Les moitiés suivantes des deux séries composent aussi une série complète.

tonalité. Cette note dominante impose aux autres notes une hiérarchie à laquelle Schoenberg a voulu échapper. En 1923, il établit la méthode à douze tons, qui donne le même mérite à chaque note de la gamme chromatique suivante : *do, do[#], ré, m^b, mi, fa, sol^b, sol, la^b, la, s^b, si* ([#] signifie dièse, qui augmente d'un demi-ton la note, et ^b, bémol, qui la diminue d'autant). Dans cette gamme, chaque note est séparée de la suivante par un demi ton.

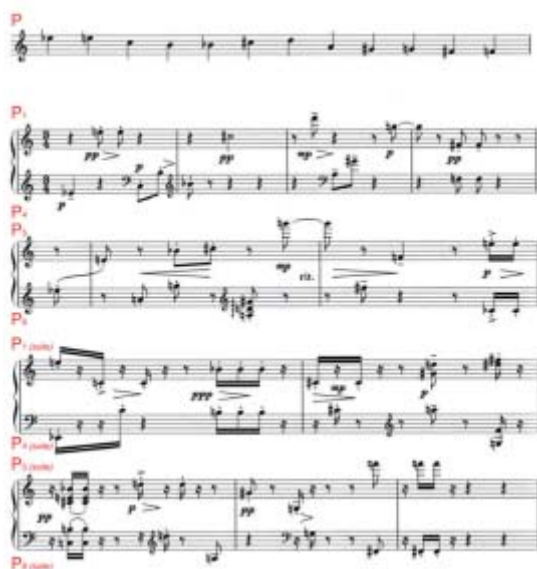
Une composition dodécaphonique est fondée sur une séquence de ces 12 tons musicaux distincts, sans répétition, nommée série élémentaire (voir la figure 1). L'œuvre est une combinaison de cette série et d'autres séries dérivées par des symétries que nous décrirons plus loin. Par ailleurs, aucune série n'est jouée avant que la précédente ne soit terminée : au terme de la composition, les 12 notes sont apparues un même nombre de fois.

Nous représenterons les notes d'une série par un nombre entier, par convention, la première note étant représentée par 0 : ainsi, la série élémentaire utilisée par Schoenberg dans son *Concerto pour piano, opus 42*, (*m^b, s^b, ré, fa, mi, do, sol^b, la^b, do[#], la, si, sol*) devient (0, 7, 11, 2, 1, 9, 3, 5, 10, 6, 8, 4). La différence entre deux nombres représentant deux notes est le nombre de demi-tons qui séparent les deux notes correspondantes.

Quelles symétries sont-elles autorisées dans une composition dodécaphonique ? Notons d'abord que chaque

nombre est une classe d'équivalence modulo 12 : chaque nombre représente d'une part ce nombre, mais aussi ce nombre additionné d'un multiple de 12. Ainsi, par exemple, 1 est équivalent à 49 ou à -11. L'addition de deux nombres devient une addition modulo 12 : par exemple, $(3 + 8)^* = 11$, $(5 + 7)^* = 0$ ou $(7 + 7)^* = 2$ (l'astérisque indique que la somme est effectuée modulo 12, c'est-à-dire que l'on n'écrit que le reste de la division par 12 du résultat de l'addition).

Examinons maintenant les symétries. La série élémentaire est $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$, où $a_1 = 0$. La série rétrograde, nommée $R(P)$ est P jouée à l'envers : $R(P) = (a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$. Pour la série élémentaire du *Concerto pour piano, opus 42*, $R(P) = (4, 8, 6, 10, 5, 3, 9, 1, 2, 11, 7, 0)$. Dans la série renversée (ou en miroir), nommée $I(P)$, les nombres de la série élémentaire P sont remplacés par leurs nombres opposés modulo 12 : $I(P) = [(-a_1)^*, (-a_2)^*, (-a_3)^*, (-a_4)^*, (-a_5)^*, (-a_6)^*, (-a_7)^*, (-a_8)^*, (-a_9)^*, (-a_{10})^*, (-a_{11})^*, (-a_{12})^*]$, soit, dans notre exemple (0, 5, 1, 10, 11, 3, 9, 7, 2, 6, 4, 8). La série renversée rétrograde, $RI(P)$, est obtenue de P en appliquant les deux opérations précédentes : $RI(P) = [(-a_{12})^*, (-a_{11})^*, (-a_{10})^*, (-a_9)^*, (-a_8)^*, (-a_7)^*, (-a_6)^*, (-a_5)^*, (-a_4)^*, (-a_3)^*, (-a_2)^*, (-a_1)^*]$, soit (8, 4, 6, 2, 7, 9, 3, 11, 10, 1, 5, 0). La série transposée de P par k demi-tons (k est com-



1. LE KINDERSTÜCK est la première œuvre dodécaphonique de Webern. La pièce débute par quatre séries qui sont les transposées de P (en haut), de respectivement (de haut en bas) 1, 4, 5 et 6 demi-tons.