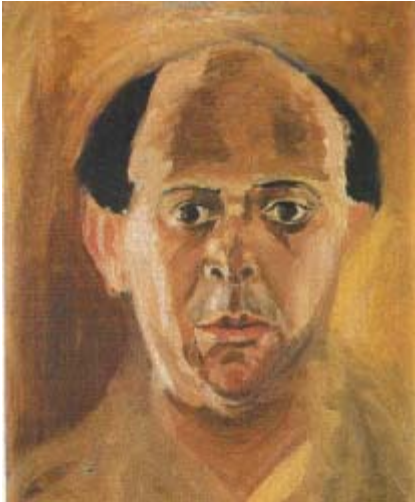




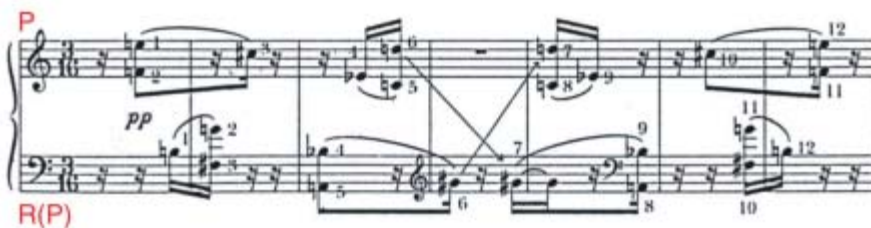
Mathématiques dodécaphoniques

CARLOTA SIMOES

Les mathématiques aident à analyser les règles strictes de la musique dodécaphonique.

Depuis Pythagore, mathématiques et musique sont sœurs jumelles. La musique du xx^e siècle n'échappe pas à l'inspiration mathématique, notamment la musique dodécaphonique ; cette musique a été créée en 1923 par Arnold von Schoenberg (1874-1951) – son autoportrait est à côté du titre –, et adoptée par ses deux élèves Alban Berg (1885-1935) et Anton Webern (1883-1945). Les trois compositeurs étaient intellectuellement «à l'unisson», aussi leur association a été nommée la *Seconde école viennoise de musique*, après celle de Haydn, Mozart et Beethoven.

Les règles de composition de cette musique sont formalisables et la mathématique facilite l'analyse des œuvres du trio viennois. La musique dodécaphonique se distingue de la musique tonale où une des sept notes de la gamme diatonique (*do, ré, mi, fa, sol, la, si, do*) prédomine sur les autres. Le plus souvent, il s'agit de la cinquième note (ici, *sol*) de la gamme choisie par le compositeur pour marquer la



2. LES VARIATIONS POUR PIANO, OPUS 27, de Webern, utilisent une série P (en haut) et la série rétrograde R(P) (en bas). Ces deux séries se combinent, c'est-à-dire que les six premières notes de P, jouées par la main droite, et les six premières notes de R(P), jouées par la main gauche, forment une série complète des 12 notes de la gamme chromatique. Les moitiés suivantes des deux séries composent aussi une série complète.

tonalité. Cette note dominante impose aux autres notes une hiérarchie à laquelle Schoenberg a voulu échapper. En 1923, il établit la méthode à douze tons, qui donne le même mérite à chaque note de la gamme chromatique suivante : *do, do#, ré, mib, mi, fa, sol, lab, la, sib, si* (*#* signifie dièse, qui augmente d'un demi-ton la note, et *b*, bémol, qui la diminue d'autant). Dans cette gamme, chaque note est séparée de la suivante par un demi ton.

Une composition dodécaphonique est fondée sur une séquence de ces 12 tons musicaux distincts, sans répétition, nommée série élémentaire (voir la figure 1). L'œuvre est une combinaison de cette série et d'autres séries dérivées par des symétries que nous décrirons plus loin. Par ailleurs, aucune série n'est jouée avant que la précédente ne soit terminée : au terme de la composition, les 12 notes sont apparues un même nombre de fois.

Nous représenterons les notes d'une série par un nombre entier, par convention, la première note étant représentée par 0 : ainsi, la série élémentaire utilisée par Schoenberg dans son *Concerto pour piano, opus 42*, (*mi, sib, ré, fa, mi, do, solb, lab, do#, la, si, sol*) devient (0, 7, 11, 2, 1, 9, 3, 5, 10, 6, 8, 4). La différence entre deux nombres représentant deux notes est le nombre de demi-tons qui séparent les deux notes correspondantes.

Quelles symétries sont-elles autorisées dans une composition dodécaphonique ? Notons d'abord que chaque

nombre est une classe d'équivalence modulo 12 : chaque nombre représente d'une part ce nombre, mais aussi ce nombre additionné d'un multiple de 12. Ainsi, par exemple, 1 est équivalent à 49 ou à -11. L'addition de deux nombres devient une addition modulo 12 : par exemple, $(3 + 8)^* = 11$, $(5 + 7)^* = 0$ ou $(7 + 7)^* = 2$ (l'astérisque indique que la somme est effectuée modulo 12, c'est-à-dire que l'on n'écrit que le reste de la division par 12 du résultat de l'addition).

Examinons maintenant les symétries. La série élémentaire est $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$, où $a_1 = 0$. La série rétrograde, nommée $R(P)$ est P jouée à l'envers : $R(P) = (a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$. Pour la série élémentaire du *Concerto pour piano, opus 42*, $R(P) = (4, 8, 6, 10, 5, 3, 9, 1, 2, 11, 7, 0)$. Dans la série renversée (ou en miroir), nommée $I(P)$, les nombres de la série élémentaire P sont remplacés par leurs nombres opposés modulo 12 : $I(P) = [(-a_1)^*, (-a_2)^*, (-a_3)^*, (-a_4)^*, (-a_5)^*, (-a_6)^*, (-a_7)^*, (-a_8)^*, (-a_9)^*, (-a_{10})^*, (-a_{11})^*, (-a_{12})^*]$, soit, dans notre exemple (0, 5, 1, 10, 11, 3, 9, 7, 2, 6, 4, 8). La série renversée rétrograde, $RI(P)$, est obtenue de P en appliquant les deux opérations précédentes : $RI(P) = [(-a_{12})^*, (-a_{11})^*, (-a_{10})^*, (-a_9)^*, (-a_8)^*, (-a_7)^*, (-a_6)^*, (-a_5)^*, (-a_4)^*, (-a_3)^*, (-a_2)^*, (-a_1)^*]$, soit (8, 4, 6, 2, 7, 9, 3, 11, 10, 1, 5, 0). La série transposée de P par k demi-tons (k est com-



1. LE KINDERSTÜCK est la première œuvre dodécaphonique de Webern. La pièce débute par quatre séries qui sont les transposées de P (en haut), de respectivement (de haut en bas) 1, 4, 5 et 6 demi-tons.

pris entre 0 et 11) est obtenue par l'addition modulo 12 de k à tous les nombres de la série P : $P_k = [(a_1+k)^*, (a_2+k)^*, (a_3+k)^*, (a_4+k)^*, (a_5+k)^*, (a_6+k)^*, (a_7+k)^*, (a_8+k)^*, (a_9+k)^*, (a_{10}+k)^*, (a_{11}+k)^*, (a_{12}+k)^*]$. Par exemple, dans le *Concerto pour piano*, *Opus 42*, $P_5 = (5, 0, 4, 7, 6, 2, 8, 10, 3, 11, 1, 9)$.

De la même façon, nous obtenons les transposées par k demi-tons d'une série rétrograde $R_k(P)$, d'une série renversée $I_k(P)$ et d'une série renversée rétrograde $RI_k(P)$. À partir d'une série élémentaire P , nous construisons 47 séries dérivées que nous pouvons regrouper dans une matrice (voir la figure 4). Une composition dodécaphonique est construite uniquement à partir d'une série élémentaire et de ses dérivées. Le compositeur choisit la série selon l'idée qu'il a de l'œuvre.

Une série étant une permutation de 12 nombres, il en existe donc $12!$, soit 479 001 600. Les musiciens se sont intéressés à celles qui avaient certaines propriétés. Prenons, par exemple, la série $P = (0, 2, 7, 5, 10, 9, 3, 4, 11, 1, 8, 6)$: sa série transposée de six demi-tons, soit $P_6 = (6, 8, 1, 11, 4, 3, 9, 10, 5, 7, 2, 0)$ est identique à $R(P)$, aussi cette série élémentaire P a moins de 47 séries dérivées.

Une autre propriété exploitée est la combinaison de deux sous-séries élémentaires. Une série élémentaire $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$ peut être divisée en deux séries, nommées hexacordes, de six notes : la série $H_1(P) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ et la série $H_2(P) = (a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$. Les séries A et B se combinent quand $[H_1(A), H_2(B)]$ et $[H_1(B), H_2(A)]$ définissent aussi des séries élémentaires. Chaque série élémentaire se combine à sa série rétrograde. Webern a utilisé cette propriété dans *Les variations pour piano*, *opus 27* (voir la figure 2), fondée sur la série $P = (0, 1, 9, 11, 8, 10, 4, 5, 6, 2, 3, 7)$, avec $mi=0$. Cette série P se subdivise en $H_1(P) = (0, 1, 9, 11, 8, 10)$ et en $H_2(P) = (4, 5, 6, 2, 3, 7)$. Ici, $R(P) = (7, 3, 2, 6, 5, 4, 10, 8, 11, 9, 1, 0)$ se divise aussi en deux hexacordes. Quand la main droite joue le premier hexacorde de P , $H_1(P) = (0, 1, 9, 11, 8, 10)$, suivi du deuxième hexacorde de $R(P)$, la main gauche joue le premier hexacorde de $R(P)$,

suivi du deuxième hexacorde de P . La musique a ainsi la forme d'un palindrome : la main droite joue 0, 1, 9, 11, 8, 10, 10, 8, 11, 9, 1, 0, et la main gauche 7, 3, 2, 6, 5, 4, 4, 5, 6, 2, 3, 7. Quand les mains ont joué chacune leur premier hexacorde, les 12 notes de la gamme ont été émises.

Dans *Pièces pour piano*, *opus 33a* (voir la figure 5), Schoenberg utilise la série élémentaire $P = (0, 7, 2, 1, 11, 8, 3, 5, 9, 10, 4, 6)$, avec $s^p = 0$. $I(P) = (0, 5, 10, 11, 1, 4, 9, 7, 3, 2, 8, 6)$ et $I_5(P) = (5, 10, 3, 4, 6, 9, 2, 0, 8, 7, 1, 11)$. P et $I_5(P)$ sont deux séries combinées, chacune est jouée par une main : là encore, lorsqu'elles ont joué le premier hexacorde, les 12 notes ont été jouées.

Du trio viennois, Anton von Webern est celui qui s'est le plus éloigné de la musique tonale. Ses compositions sont souvent brèves et concises : elles durent seulement quelques minutes. La mélodie traditionnelle y est substituée par des notes individuelles, qui sont parfois attribuées à des instruments différents, comme dans le *Concerto pour neuf instruments*, *opus 24*. La série élémentaire de cette composition, $P = (0, 11, 3, 4, 8, 7, 9, 5, 6, 1, 2, 10)$, avec $Si = 0$, a été choisie pour ses nombreuses symétries internes. Prenons la série des trois premières notes $T = (0, 11, 3)$, $I(T) = (0, 1, 9)$, $R(T) = (3, 11, 0)$ et $RI(T) = (9, 1, 0)$. En décalant, on obtient : $I_1(T) = (1, 2, 10)$, $R_6(T) = (9, 5, 6)$ et $RI_7(T) = (4, 8, 7)$. La série élémentaire P peut être réécrite à partir de ces mini séries $P = (T, RI_7(T), R_6(T), I_1(T))$: chaque mini série est jouée par un instrument différent (voir la figure 3).

Après Schoenberg, Berg et Webern, d'autres compositeurs ont utilisé des séries pour des éléments musicaux autres que les notes, tels la métrique, l'intensité du son, le timbre...

Si «la musique dodécaphonique a été condamnée par les nazis, car son auteur était juif, par les staliniens pour avoir un formalisme cosmopolite bourgeois et par le public pour être différent de tout ce qui existait», elle est sans doute appréciée des mathématiciens.

Carlota SIMOES,
Université de Coimbra, Portugal



3. DANS LE *CONCERTO POUR NEUF INSTRUMENTS*, *OPUS 24*, de Webern, la série élémentaire P (en haut) se décompose en quatre sous-séries de trois notes. À partir de la première sous-série Q , on construit $RI_7(Q)$, $R_6(Q)$ et $I_1(Q)$. P se réécrit ainsi $(Q, RI_7(Q), R_6(Q), I_1(Q))$. Chacune de ces sous-séries est jouée par un instrument différent : la flûte, le hautbois, la clarinette et la trompette.

	1	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	
P	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R
P ₅	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R ₅
P ₁	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R ₁
P ₁₀	10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2	R ₁₀
P ₁₁	11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3	R ₁₁
P ₃	3	10	2	5	4	0	6	8	10	9	11	7	R ₃
P ₉	9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1	R ₉
P ₇	7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11	R ₇
P ₂	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6	R ₂
P ₆	6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10	R ₆
P ₄	4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8	R ₄
P ₈	8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0	R ₈
	RI	RI ₇	RI ₁₁	RI ₂	RI ₁	RI ₉	RI ₃	RI ₅	RI ₁₀	RI ₆	RI ₈	RI ₄	

4. CETTE MATRICE regroupe les séries dérivées d'une série élémentaire P . À partir de celle-ci, on construit la série rétrograde $R(P)$, la série renversée $I(P)$ et la série renversée rétrograde $RI(P)$. Chacune de ces quatre séries peut être décalée de 1 à 11 demi-tons : on construit ainsi P_k , $R_k(P)$, $I_k(P)$ et $RI_k(P)$, pour k , un entier compris entre 1 et 11. Au total, une série P a 47 séries dérivées.



5. LES *PIÈCES POUR PIANO*, *OPUS 33A*, de Schoenberg, sont élaborées à partir d'une série élémentaire P et de la série renversée décalée de cinq demi-tons $I_5(P)$. Ces deux séries (en haut, à

droite) se combinent : quand les mains gauche et droite ont joué chacune les six premières notes de chaque série, les 12 notes de la gamme chromatique ont été jouées.