

pris entre 0 et 11) est obtenue par l'addition modulo 12 de k à tous les nombres de la série P : $P_k = [(a_1+k)^*, (a_2+k)^*, (a_3+k)^*, (a_4+k)^*, (a_5+k)^*, (a_6+k)^*, (a_7+k)^*, (a_8+k)^*, (a_9+k)^*, (a_{10}+k)^*, (a_{11}+k)^*, (a_{12}+k)^*]$. Par exemple, dans le *Concerto pour piano*, *Opus 42*, $P_5 = (5, 0, 4, 7, 6, 2, 8, 10, 3, 11, 1, 9)$.

De la même façon, nous obtenons les transposées par k demi-tons d'une série rétrograde $R_k(P)$, d'une série renversée $I_k(P)$ et d'une série renversée rétrograde $RI_k(P)$. À partir d'une série élémentaire P , nous construisons 47 séries dérivées que nous pouvons regrouper dans une matrice (voir la figure 4). Une composition dodécaphonique est construite uniquement à partir d'une série élémentaire et de ses dérivées. Le compositeur choisit la série selon l'idée qu'il a de l'œuvre.

Une série étant une permutation de 12 nombres, il en existe donc $12!$, soit 479 001 600. Les musiciens se sont intéressés à celles qui avaient certaines propriétés. Prenons, par exemple, la série $P = (0, 2, 7, 5, 10, 9, 3, 4, 11, 1, 8, 6)$: sa série transposée de six demi-tons, soit $P_6 = (6, 8, 1, 11, 4, 3, 9, 10, 5, 7, 2, 0)$ est identique à $R(P)$, aussi cette série élémentaire P a moins de 47 séries dérivées.

Une autre propriété exploitée est la combinaison de deux sous-séries élémentaires. Une série élémentaire $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$ peut être divisée en deux séries, nommées hexacordes, de six notes : la série $H_1(P) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ et la série $H_2(P) = (a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$. Les séries A et B se combinent quand $[H_1(A), H_2(B)]$ et $[H_1(B), H_2(A)]$ définissent aussi des séries élémentaires. Chaque série élémentaire se combine à sa série rétrograde. Webern a utilisé cette propriété dans *Les variations pour piano*, *opus 27* (voir la figure 2), fondée sur la série $P = (0, 1, 9, 11, 8, 10, 4, 5, 6, 2, 3, 7)$, avec $mi=0$. Cette série P se subdivise en $H_1(P) = (0, 1, 9, 11, 8, 10)$ et en $H_2(P) = (4, 5, 6, 2, 3, 7)$. Ici, $R(P) = (7, 3, 2, 6, 5, 4, 10, 8, 11, 9, 1, 0)$ se divise aussi en deux hexacordes. Quand la main droite joue le premier hexacorde de P , $H_1(P) = (0, 1, 9, 11, 8, 10)$, suivi du deuxième hexacorde de $R(P)$, la main gauche joue le premier hexacorde de $R(P)$,

suivi du deuxième hexacorde de P . La musique a ainsi la forme d'un palindrome : la main droite joue 0, 1, 9, 11, 8, 10, 10, 8, 11, 9, 1, 0, et la main gauche 7, 3, 2, 6, 5, 4, 4, 5, 6, 2, 3, 7. Quand les mains ont joué chacune leur premier hexacorde, les 12 notes de la gamme ont été émises.

Dans *Pièces pour piano*, *opus 33a* (voir la figure 5), Schoenberg utilise la série élémentaire $P = (0, 7, 2, 1, 11, 8, 3, 5, 9, 10, 4, 6)$, avec $s^p = 0$. $I(P) = (0, 5, 10, 11, 1, 4, 9, 7, 3, 2, 8, 6)$ et $I_5(P) = (5, 10, 3, 4, 6, 9, 2, 0, 8, 7, 1, 11)$. P et $I_5(P)$ sont deux séries combinées, chacune est jouée par une main : là encore, lorsqu'elles ont joué le premier hexacorde, les 12 notes ont été jouées.

Du trio viennois, Anton von Webern est celui qui s'est le plus éloigné de la musique tonale. Ses compositions sont souvent brèves et concises : elles durent seulement quelques minutes. La mélodie traditionnelle y est substituée par des notes individuelles, qui sont parfois attribuées à des instruments différents, comme dans le *Concerto pour neuf instruments*, *opus 24*. La série élémentaire de cette composition, $P = (0, 11, 3, 4, 8, 7, 9, 5, 6, 1, 2, 10)$, avec $Si = 0$, a été choisie pour ses nombreuses symétries internes. Prenons la série des trois premières notes $T = (0, 11, 3)$, $I(T) = (0, 1, 9)$, $R(T) = (3, 11, 0)$ et $RI(T) = (9, 1, 0)$. En décalant, on obtient : $I_1(T) = (1, 2, 10)$, $R_6(T) = (9, 5, 6)$ et $RI_7(T) = (4, 8, 7)$. La série élémentaire P peut être réécrite à partir de ces mini séries $P = (T, RI_7(T), R_6(T), I_1(T))$: chaque mini série est jouée par un instrument différent (voir la figure 3).

Après Schoenberg, Berg et Webern, d'autres compositeurs ont utilisé des séries pour des éléments musicaux autres que les notes, tels la métrique, l'intensité du son, le timbre...

Si «la musique dodécaphonique a été condamnée par les nazis, car son auteur était juif, par les staliniens pour avoir un formalisme cosmopolite bourgeois et par le public pour être différent de tout ce qui existait», elle est sans doute appréciée des mathématiciens.

Carlota SIMOES,
Université de Coimbra, Portugal



3. DANS LE CONCERTO POUR NEUF INSTRUMENTS, OPUS 24, de Webern, la série élémentaire P (en haut) se décompose en quatre sous-séries de trois notes. À partir de la première sous-série Q , on construit $RI_7(Q)$, $R_6(Q)$ et $I_1(Q)$. P se réécrit ainsi $(Q, RI_7(Q), R_6(Q), I_1(Q))$. P se réécrit ainsi $(Q, RI_7(Q), R_6(Q), I_1(Q))$. Chacune de ces sous-séries est jouée par un instrument différent : la flûte, le hautbois, la clarinette et la trompette.

	1	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	
P	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R
P ₅	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R ₅
P ₁	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R ₁
P ₁₀	10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2	R ₁₀
P ₁₁	11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3	R ₁₁
P ₃	3	10	2	5	4	0	6	8	10	9	11	7	R ₃
P ₉	9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1	R ₉
P ₇	7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11	R ₇
P ₂	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6	R ₂
P ₆	6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10	R ₆
P ₄	4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8	R ₄
P ₈	8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0	R ₈
	RI	RI ₇	RI ₁₁	RI ₂	RI ₁	RI ₉	RI ₃	RI ₅	RI ₁₀	RI ₆	RI ₈	RI ₄	

4. CETTE MATRICE regroupe les séries dérivées d'une série élémentaire P . À partir de celle-ci, on construit la série rétrograde $R(P)$, la série renversée $I(P)$ et la série renversée rétrograde $RI(P)$. Chacune de ces quatre séries peut être décalée de 1 à 11 demi-tons : on construit ainsi P_k , $R_k(P)$, $I_k(P)$ et $RI_k(P)$, pour k , un entier compris entre 1 et 11. Au total, une série P a 47 séries dérivées.



5. LES PIÈCES POUR PIANO, OPUS 33A, de Schoenberg, sont élaborées à partir d'une série élémentaire P et de la série renversée décalée de cinq demi-tons $I_5(P)$. Ces deux séries (en haut, à

droite) se combinent : quand les mains gauche et droite ont joué chacune les six premières notes de chaque série, les 12 notes de la gamme chromatique ont été jouées.