



rait pas imposé un sujet à son étudiant et qu'Audin a lui-même choisi un thème «bourbachique». D'ailleurs, la bibliographie de la thèse d'Audin confirme son intérêt pour les volumes des *Éléments de mathématique* sur les espaces vectoriels topologiques, parus dans les années 1950.

LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Quelles sont les caractéristiques de ces espaces et pourquoi Bourbaki, puis notre jeune mathématicien, les ont-ils étudiés ? La structure d'espace vectoriel est fondamentale en algèbre linéaire et en analyse, vastes domaines issus de l'étude des systèmes d'équation linéaires, aux très nombreuses applications. Un espace vectoriel est un ensemble dont les éléments,

appelés vecteurs, peuvent s'additionner entre eux et être multipliés par des «nombres» appelés scalaires : si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ est encore un vecteur, et si α est un scalaire, $\alpha\mathbf{v}$ est aussi un vecteur. L'un des exemples les plus simples d'espace vectoriel est l'ensemble des vecteurs du plan, qui s'additionnent selon la règle du parallélogramme et qui peuvent être multipliés par des nombres réels. On dit qu'il s'agit là d'un espace vectoriel «sur $\mathbb{R}$ », les scalaires étant des nombres réels. On peut aussi construire des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ (les scalaires sont des nombres complexes) ou, plus généralement, sur d'autres ensembles possédant certaines structures abstraites, que l'on appelle des «corps».

Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel où l'on peut passer continûment d'un vecteur à l'autre (la topologie se préoccupant de tout ce qui dépend de la notion de limite, de continuité et de voisinage). Plus précisément, c'est un espace vectoriel où l'application qui, à tout couple de vecteurs $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, fait correspondre le vecteur $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, et l'application qui, à tout scalaire α et tout vecteur $\mathbf{v}$, fait correspondre le vecteur $\alpha\mathbf{v}$, sont continues. La théorie des espaces vectoriels topologiques généralise la théorie des espaces vectoriels normés (espaces où, pour chaque vecteur, on peut définir une «norme», une longueur en quelque sorte), tels les espaces vectoriels euclidiens. Dans les espaces vectoriels topologiques, il n'y a pas nécessairement de notion de distance, mais il y a toujours une notion de continuité. Cette théorie est utile en analyse fonctionnelle, soit l'étude des espaces de dimensions infinies dont les éléments sont des fonctions.

Dès lors, on perçoit pourquoi Bourbaki et ses disciples se sont penchés sur ces espaces vectoriels topologiques, qui englobent les espaces plus classiques : les propriétés des équations linéaires que l'on y démontrent restent vraies dans des espaces plus petits, de sorte que l'on n'a pas besoin de recommencer la démonstration. Attaché à la concision et à la précision, Bourbaki voulait présenter les mathématiques de la façon la plus générale possible. Il voulait fournir à ses lecteurs des outils mathématiques «aussi robustes et aussi universels que possibles», selon les mots d'André Weil, un autre de ses fondateurs. Le «paquet abstrait» de l'œuvre de Bourbaki, à savoir les notions générales qu'il voulait inclure au début et qui seraient utiles pour l'ensemble des sujets abordés ensuite, a grossi de plus en plus à mesure que le travail avançait. Dans ce paquet, les mathématiques apparaissent comme un édifice doté d'une unité profonde, reposant notamment sur la théorie des ensembles, et hiérarchisé en terme de structures abstraites (algébriques, topologiques...).

L'un des fils conducteurs de la thèse d'Audin est l'étude des propriétés d'opérateurs linéaires dans les espaces vectoriels topologiques de dimensions infinies. Un opérateur linéaire, notons le A , est tel que $A(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha A(\mathbf{v}_1) + \beta A(\mathbf{v}_2)$, quels que soient les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et les nombres scalaires α et β .

Parmi les sujets à la mode dans les années 1950 figure la généralisation de propriétés des opérateurs linéaires, bien connues dans les espaces de dimensions finies (où les vecteurs sont caractérisés par un nombre fini de composantes), aux espaces de dimensions infinies. En dimensions finies, de nombreuses propriétés topologiques des opérateurs linéaires se déduisent de leurs propriétés algébriques, ce qui, en général, est faux en dimensions infinies. Ainsi, quand on considère les solutions x et y d'un système de deux d'équations à deux inconnues, soit $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ et $a_{21}x + a_{22}y = b_2$, on montre facilement que $x + \varepsilon$ et $y + \varepsilon$ sont des solutions (voisines de x et y) du système où a_{11} est remplacé par $a_{11} + \varepsilon$, a_{12} par $a_{12} + \varepsilon$..., puisque $a_{11}\varepsilon + a_{12}\varepsilon$ et $a_{21}\varepsilon + a_{22}\varepsilon$ sont négligeables. En revanche, en dimensions infinies, c'est-à-dire pour un système d'une infinité d'équations à une infinité de dimensions, on ne pourra plus négliger les sommes $a_{ij}\varepsilon$, car une somme infinie d'éléments infiniment petits n'est pas forcément infiniment petite. Audin voulait ainsi contribuer à franchir un pas de plus dans certaines démarches de généralisation entreprise par Bourbaki, en passant des espaces à dimensions finies à des espaces à dimensions infinies.

PRIX MAURICE AUDIN

J.-L. LIONS	J.-P. KAHANE	A. NÉRON	M. LAZARD	M. BERGER
1959	1960	1961	1962	1963
JURY J. DELSARTRE H. CARTAN G. CHOQUET	JURY S. MANDELBROJT J. DENY	JURY J. DIEUDONNÉ H. DELANGE P. SAMUEL	JURY C. CHEVALLEY J.-P. SERRE R. THOM	JURY A. LICHNÉROWITZ J. DIXMIER G. REEB

Créé en 1959, le prix Audin a récompensé chaque année un jeune mathématicien pendant la guerre d'Algérie. Il a été décerné une dernière fois en 1964, à Paul-André Meyer et Pierre Cartier. Un prix Audin a également été décerné en Italie en 1961.

DES MATHÉMATIQUES UNIVERSELLES

Il a également exploré plusieurs autres directions de recherche dans son entreprise généralisatrice. Il voulait démontrer, dans les espaces topologiques abstraits, des propriétés établies dans des espaces vectoriels particuliers (par exemple, des propriétés des opérateurs intégraux dans des espaces de fonctions intégrables).

Sa thèse contient aussi des notions fondamentales sur des propriétés spectrales de familles d'opérateurs linéaires. La théorie spectrale est une extension de l'étude du problème dit «des valeurs propres et des vecteurs propres» dans le cas des espaces vectoriels de dimensions infinies, tels que certains espaces de fonctions (par exemple, l'espace des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes telles que l'intégrale du carré $|f|^2$ de leur module, donne un nombre fini ; ces fonctions jouent un rôle important, non seulement en mathématiques, mais aussi en physique et en chimie quantiques). Le problème des valeurs propres et des vecteurs propres est relatif aux applications linéaires opérant sur un espace vectoriel V . Si A désigne une application linéaire de cet espace, et s'il existe un vecteur non nul v et un nombre scalaire α tels que $A(v) = \alpha v$, v est dit vecteur propre et α est appelé valeur propre de A associé à v .

Examinons un exemple dans le plan : si P est la projection sur la droite OX parallèlement à OY , on peut voir que tout vecteur v parallèle à OX reste inchangé sous l'action de P ; autrement dit, on a $P(v) = v$; la valeur propre est 1, et comme vecteur propre associé on peut choisir n'importe quel vecteur dirigé selon OX . Mais si l'on considère un vecteur v parallèle à OY , on voit que $P(v) = 0 = 0.v$: la valeur propre est 0, et comme vecteur propre associé, on peut choisir n'importe quel vecteur de direction OY . Les nombres 0 et 1 sont les seules valeurs propres de cette projection P . L'ensemble des valeurs propres d'une application linéaire A s'appelle le spectre de A en dimensions finies et fait partie du spectre de A en dimensions infinies. L'intérêt d'étudier les vecteurs et les valeurs propres d'une application linéaire est de caractériser ses propriétés et de simplifier certains calculs.

Dans la dernière partie de sa thèse, Audin commence à explorer quelques directions de recherche qu'il pensait probablement approfondir par la suite. Il traite des équations linéaires par la méthode de Schmidt, qui consiste à décomposer des opérateurs linéaires à dimensions infinies en somme d'opé-

rateurs plus simples. Cette méthode, déjà utilisée dans le cadre hilbertien, soit dans les espaces vectoriels euclidiens à dimension infinie, commençait tout juste à être employée dans le cas d'espaces plus généraux, tels les espaces de Banach (des espaces où il n'y a pas de notion d'orthogonalité) et des espaces vectoriels topologiques. Audin entame l'étude des perturbations (des opérateurs que l'on introduit dans les équations linéaires et qui modifient légèrement ou qui «perturbent» les solutions) et leurs effets sur les propriétés topologiques de familles d'opérateurs linéaires. Il projetait sans doute aussi de démontrer certaines conjectures que le mathématicien polonais Stephan Banach, l'un des pères de l'analyse fonctionnelle, avait énoncé en 1932 dans sa *Théorie des opérateurs linéaires*, mentionné dans la bibliographie de sa thèse. Il semble avoir été influencé par les *Leçons d'analyse fonctionnelle*, des mathématiciens hongrois Francis Riesz et Bela Nagi. Dans sa thèse, il présente quelques applications à des espaces particuliers de fonctions de propriétés démontrées dans des espaces plus abstraits.

Au début de l'affaire Audin, comment la communauté mathématique a-t-elle réagi ? Une certaine presse, souvent clandestine et souvent saisie, contenait des informations sur la guerre d'Algérie et son cortège de tortures, de disparitions et de mensonges des militaires couverts par le gouvernement. De même, les articles de François Mauriac, à l'*Express*, de Pierre Henri Simon, au *Monde*, les livres de l'historien Pierre Vidal-Naquet, les témoignages de Henri Alleg, devenu journaliste à l'*Humanité*, et de militaires de carrière, tel le général Paris de la Bollardière, ou d'appelés portaient la situation à la connaissance du public. Cependant, la plupart des contemporains de Maurice Audin, les mathématiciens et les autres, ne voulaient pas savoir. La soutenance de la thèse d'Audin a eu un retentissement bien vite étouffé, mais pour maintenir son souvenir vivace, un prix Audin a été créé en 1959. Pendant la guerre d'Algérie, il a récompensé chaque année un jeune mathématicien.

Si l'on n'évoque pas périodiquement les événements douloureux du passé, la mémoire s'estompe. Pourquoi ne pas recréer un prix Audin qui distinguerait un jeune mathématicien de 25 ans, soit l'âge d'Audin lorsqu'il a disparu ?

Gérard TRONEL a fait sa carrière de mathématicien à l'Université Pierre et Marie Curie.

LA TERRE

50 expériences pour découvrir notre planète

Comment naissent les dunes ?
 Comment une rivière creuse-t-elle une vallée ?
 Comment se forment les grottes ?
 Pourquoi les pierres éclatent-elles sous le froid ?
 Ce livre propose une série d'expériences pour comprendre comment le vent, la pluie, la glace, les cours d'eau modelent le visage de la Terre.

ANDRÉ PROST est géologue, ancien enseignant à l'université d'Orléans et à Paris VI, et ingénieur au Bureau des Recherches Géologiques et Minières à Orléans.

Code 002401-100 F-128 pages

Voir bon de commande page 96

BELIN • POUR LA SCIENCE