

L'enfer des paris

JEAN-PAUL DELAHAYE

Certaines formulations sont parfois si simples qu'on croit pouvoir maîtriser les probabilités. À tort : il faut nous méfier de l'intuition.

Les probabilités sont un domaine où l'intuition nous joue des tours. Nous allons présenter trois jeux étranges où notre intuition a du mal à produire un jugement correct, ce qui conduit à des situations que nous jugeons paradoxales. La première est d'autant plus étonnante qu'elle est simple, la deuxième est déjà plus subtile, la troisième laisse carrément perplexe.

S'OPPOSER AU HASARD DES NAISSANCES?

Dans un pays lointain, les femmes ont des enfants qui sont de sexe masculin dans 50 pour cent des cas exactement et, bien sûr, de sexe féminin dans 50 pour cent des cas. Le gouvernement décide que seuls les couples ayant eu au moins une fille toucheront leur retraite. En réaction à cette mesure, chaque couple adopte alors la stratégie suivante :

- si leur premier enfant est une fille, satisfait il n'en a pas d'autres ;
- si le premier enfant est un garçon, le couple a un second enfant qui sera le dernier si c'est une fille ;
- et ainsi de suite, chaque couple ayant des enfants jusqu'à ce qu'il ait une fille, laquelle est alors leur dernier enfant.

Cette stratégie favorise les filles puisque les familles s'arrêtent dès qu'une fille naît. Sans faire de calcul et en réfléchissant une minute au plus, donnez votre avis : la proportion de filles à la naissance dans ce pays est-elle de $1/3$, $1/2$, $2/3$, $3/4$ ou $4/5$? (l'une des réponses proposées est juste)

Réponse

La seconde réponse de la liste, $1/2$, est la bonne : les stratégies des familles n'ont aucune influence sur la proportion de filles (il en serait de même si la probabilité de naissance des filles était différente de 50 pour cent). Aussi surprenant que cela paraisse, les stratégies familiales appliquées par les couples n'ont aucun effet sur le rapport garçon/fille. On peut s'en rendre compte sans faire le moindre calcul : quelle que soit la position d'une fille dans une famille, la probabilité que le prochain

enfant soit de sexe féminin est $1/2$: le passé n'influe pas sur la naissance à venir (c'est du moins l'hypothèse raisonnable qu'on adopte toujours). Tout enfant à naître ayant une probabilité de 50 pour cent d'être une fille, il naît donc en moyenne une fille pour deux naissances. Plus généralement, quelles que soient les règles adoptées par les familles pour cesser d'avoir des enfants en fonction des précédentes naissances dans la famille, les proportions de filles et de garçons restent inchangées : toutes les stratégies se valent et aucune n'a le moindre effet perturbateur.

Auriez-vous des doutes concernant le raisonnement ci-dessus ? Faites alors le calcul suivant (pour simplifier nous supposons que les familles n'ont jamais plus de quatre enfants, mais vous pouvez reprendre le calcul avec 5, 6 ou n enfants, ou même sans limitation du nombre d'enfants).

Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : $1/2$. La famille est alors du type : [fille].

Probabilité qu'une famille possède deux enfants : $1/4$. La famille est du type : [garçon, fille].

Probabilité qu'une famille possède trois enfants : $1/8$. La famille est du type : [garçon, garçon, fille].

Probabilité qu'une famille possède quatre enfants : $1/8$. La famille est une fois sur deux du type : [garçon, garçon, garçon, fille] et une fois sur deux du type : [garçon, garçon, garçon, garçon].

Donc, sur 16 familles, il y a en moyenne huit familles du type [fille], quatre du type [garçon, fille], deux du type [garçon, garçon, fille], une du type [garçon, garçon, garçon, fille] et une du type [garçon, garçon, garçon, garçon]. Cela fait au total $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ filles et $4 + 4 + 3 + 4 = 15$ garçons.

L'effort fait par chaque famille pour avoir une fille ne change pas la proportion de garçons et de filles, mais conduit cependant à une situation où la plupart des familles sont satisfaites, car elles ont au moins une fille (dans notre exemple, 15 familles sur 16 ont une fille).

Signalons hélas, qu'aujourd'hui en Inde et en Chine, les règles traditionnelles

sur les dots et d'autres raisons socio-culturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure à celle des garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies du type de celle envisagée plus haut, mais cela est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ce type de comportement est combattu par les autorités, car il conduit à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptible à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles et on prévoit que le problème va s'aggraver.

LE ROUGE EST MIS...

Dans le problème précédent, les «tirages» étaient indépendants et c'était l'explication simple de l'impossibilité d'adopter des stratégies familiales modifiant la proportion globale d'hommes et de femmes. Nous allons aborder un problème de stratégie optimale plus intéressant (dû au mathématicien prestidigitateur P. Diaconis) où, au contraire, les événements dépendent fortement du passé.

On vous propose le jeu suivant dénommé *La prochaine est rouge* :

- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : «La prochaine carte sera rouge» ;

– le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et, par exemple, attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre rouge et noire (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur rouge.

La stratégie évidente consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins. La stratégie consistant à parier dès la première carte donne aussi une chance sur deux de gagner. Il ne faut donc ni se précipiter ni trop attendre pour avoir de bonnes chances.

La question est :

– on vous propose de jouer à ce jeu à 1 contre 2 : si vous gagnez, le meneur de jeu vous donne un franc, si vous perdez vous donnez deux francs au meneur de jeu. Devez-vous accepter, et si oui quelle méthode de jeu devez-vous adopter pour maximiser votre gain ? Une façon équivalente de poser le problème est : existe-t-il une stratégie de prédiction qui vous garantira de gagner deux fois plus souvent que vous ne perdrez ?

Réponse

La réponse est négative, mais elle est plus étonnante encore, car, quelle que soit la stratégie que vous utiliserez, vous ne pourrez jamais avoir plus d'une chance sur deux de gagner et vous ne pourrez d'ailleurs jamais non plus avoir moins d'une chance sur deux de gagner. La stratégie courte consistant à parier dès

la première carte est aussi bonne que celle consistant à attendre la dernière, et cette stratégie est équivalente à toute autre stratégie aussi compliquée ou subtile que vous pourriez imaginer.

Comme dans le problème des naissances et malgré le contexte différent d'un paquet de cartes fini qui s'épuise en vous procurant des informations sur ce qu'il reste à venir, vous ne pouvez pas changer le 1/2 : vous ne pouvez ni faire mieux ni moins bien !

Un raisonnement qui montre l'équivalence de toutes les stratégies a été récemment proposé par Michel Emery, de l'Université de Strasbourg. Il est présenté sur la figure 2.

MÉFIEZ-VOUS DES PARIS GROUPÉS

Voici pour terminer un extraordinaire paradoxe concernant les paris groupés. Pour bien en saisir la portée, examinons ce qu'est un pari groupé.

On joue avec un dé à six faces non truqué. Considérons les deux paris suivants, qui vous sont tous les deux favorables :

- Pari 1 : si c'est 6, tu gagnes 2 F, si c'est 1, tu perds 1 F, sinon rien.
- Pari 2 : si c'est 5, tu gagnes 2 F, si c'est 2, tu perds 1 F, sinon rien.

En acceptant les deux paris simultanément, vous gagnerez en moyenne deux fois plus que vous ne perdrez ; ce sera donc toujours un pari favorable pour vous.

D'une manière générale, il est clair que si l'on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun pris individuellement vous sont favorables, cela constitue un nouveau pari (que nous dénommerons le pari groupé), lequel vous est toujours

1. PEUT-ON MODIFIER LE RAPPORT GARÇONS/FILLES ?

Même si tous les couples adoptaient la règle de ne plus avoir d'enfants dès qu'une fille naît, ce qui semble favoriser les filles, cela n'aurait aucun effet sur le rapport garçons/fille. Montrons-le pour le cas (idéalisé) où chaque couple a des enfants indéfiniment (sans limitation du nombre) jusqu'à ce qu'une fille naisse.

- Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2. La famille est du type : [fille]
- Probabilité qu'une famille possède 2 enfants : 1/4. La famille est du type : [garçon, fille]
- Probabilité qu'une famille possède 3 enfants : 1/8. La famille est du type : [garçon, garçon, fille]

- ...
- Probabilité qu'une famille possède n enfants : $1/2^n$. La famille est du type : [garçon, garçon, ..., garçon, fille]

Calculons la proportion de garçons et de filles en ne comptant que les familles de n enfants ou moins (on fera ensuite tendre n vers l'infini).

Sur $2^n - 1$ familles, il y en aura en moyenne 2^{n-1} du type [fille], 2^{n-2} du type [garçon, fille], 2^{n-3} du type [garçon, garçon, fille]... une du type [garçon, garçon, ..., garçon, fille], etc.

Il y a donc, au total, $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = 2^n - 1$ filles.

Pour compter les garçons, le travail est un peu plus compliqué.

Nombre d'aînés : $2^{n-1} - 1$

Nombre de seconds : $2^{n-2} - 1$

Nombre de troisièmes : $2^{n-3} - 1$

...

...

Nombre de $(n-1)$ -ièmes : $2 - 1$

Nombre de n -ièmes : $1 - 1$

Au total, le nombre de garçons est donc :

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 - n = 2^n - 1 - n.$$

Le rapport filles/garçons a bien pour limite 1 à l'infini.

CQFD