

sur les dots et d'autres raisons socio-culturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure à celle des garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies du type de celle envisagée plus haut, mais cela est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ce type de comportement est combattu par les autorités, car il conduit à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptible à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles et on prévoit que le problème va s'aggraver.

LE ROUGE EST MIS...

Dans le problème précédent, les «tirages» étaient indépendants et c'était l'explication simple de l'impossibilité d'adopter des stratégies familiales modifiant la proportion globale d'hommes et de femmes. Nous allons aborder un problème de stratégie optimale plus intéressant (dû au mathématicien prestidigitateur P. Diaconis) où, au contraire, les événements dépendent fortement du passé.

On vous propose le jeu suivant dénommé *La prochaine est rouge* :

- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : «La prochaine carte sera rouge» ;

– le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et, par exemple, attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre rouge et noire (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur rouge.

La stratégie évidente consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins. La stratégie consistant à parier dès la première carte donne aussi une chance sur deux de gagner. Il ne faut donc ni se précipiter ni trop attendre pour avoir de bonnes chances.

La question est :

– on vous propose de jouer à ce jeu à 1 contre 2 : si vous gagnez, le meneur de jeu vous donne un franc, si vous perdez vous donnez deux francs au meneur de jeu. Devez-vous accepter, et si oui quelle méthode de jeu devez-vous adopter pour maximiser votre gain ? Une façon équivalente de poser le problème est : existe-t-il une stratégie de prédiction qui vous garantira de gagner deux fois plus souvent que vous ne perdrez ?

Réponse

La réponse est négative, mais elle est plus étonnante encore, car, quelle que soit la stratégie que vous utiliserez, vous ne pourrez jamais avoir plus d'une chance sur deux de gagner et vous ne pourrez d'ailleurs jamais non plus avoir moins d'une chance sur deux de gagner. La stratégie courte consistant à parier dès

la première carte est aussi bonne que celle consistant à attendre la dernière, et cette stratégie est équivalente à toute autre stratégie aussi compliquée ou subtile que vous pourrez imaginer.

Comme dans le problème des naissances et malgré le contexte différent d'un paquet de cartes fini qui s'épuise en vous procurant des informations sur ce qu'il reste à venir, vous ne pouvez pas changer le 1/2 : vous ne pouvez ni faire mieux ni moins bien !

Un raisonnement qui montre l'équivalence de toutes les stratégies a été récemment proposé par Michel Emery, de l'Université de Strasbourg. Il est présenté sur la figure 2.

MÉFIEZ-VOUS DES PARIS GROUPÉS

Voici pour terminer un extraordinaire paradoxe concernant les paris groupés. Pour bien en saisir la portée, examinons ce qu'est un pari groupé.

On joue avec un dé à six faces non truqué. Considérons les deux paris suivants, qui vous sont tous les deux favorables :

- Pari 1 : si c'est 6, tu gagnes 2 F, si c'est 1, tu perds 1 F, sinon rien.
- Pari 2 : si c'est 5, tu gagnes 2 F, si c'est 2, tu perds 1 F, sinon rien.

En acceptant les deux paris simultanément, vous gagnerez en moyenne deux fois plus que vous ne perdrez ; ce sera donc toujours un pari favorable pour vous.

D'une manière générale, il est clair que si l'on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun pris individuellement vous sont favorables, cela constitue un nouveau pari (que nous nommerons le pari groupé), lequel vous est toujours

1. PEUT-ON MODIFIER LE RAPPORT GARÇONS/FILLES ?

Même si tous les couples adoptaient la règle de ne plus avoir d'enfants dès qu'une fille naît, ce qui semble favoriser les filles, cela n'aurait aucun effet sur le rapport garçons/fille. Montrons-le pour le cas (idéalisé) où chaque couple a des enfants indéfiniment (sans limitation du nombre) jusqu'à ce qu'une fille naisse.

- Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2. La famille est du type : [fille]
- Probabilité qu'une famille possède 2 enfants : 1/4. La famille est du type : [garçon, fille]
- Probabilité qu'une famille possède 3 enfants : 1/8. La famille est du type : [garçon, garçon, fille]

- ...
- Probabilité qu'une famille possède n enfants : $1/2^n$. La famille est du type : [garçon, garçon, ..., garçon, fille]

Calculons la proportion de garçons et de filles en ne comptant que les familles de n enfants ou moins (on fera ensuite tendre n vers l'infini).

Sur $2^n - 1$ familles, il y en aura en moyenne 2^{n-1} du type [fille], 2^{n-2} du type [garçon, fille], 2^{n-3} du type [garçon, garçon, fille]... une du type [garçon, garçon, ..., garçon, fille], etc.

Il y a donc, au total, $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = 2^n - 1$ filles.

Pour compter les garçons, le travail est un peu plus compliqué.

Nombre d'aînés : $2^{n-1} - 1$

Nombre de seconds : $2^{n-2} - 1$

Nombre de troisièmes : $2^{n-3} - 1$

...

...

Nombre de $(n-1)$ -ièmes : $2 - 1$

Nombre de n -ièmes : $1 - 1$

Au total, le nombre de garçons est donc :

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 - n = 2^{n-1} - 1 - n.$$

Le rapport filles/garçons a bien pour limite 1 à l'infini.

CQFD