

sur les dots et d'autres raisons socio-culturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure à celle des garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies du type de celle envisagée plus haut, mais cela est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ce type de comportement est combattu par les autorités, car il conduit à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptible à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles et on prévoit que le problème va s'aggraver.

LE ROUGE EST MIS...

Dans le problème précédent, les «tirages» étaient indépendants et c'était l'explication simple de l'impossibilité d'adopter des stratégies familiales modifiant la proportion globale d'hommes et de femmes. Nous allons aborder un problème de stratégie optimale plus intéressant (dû au mathématicien prestidigitateur P. Diaconis) où, au contraire, les événements dépendent fortement du passé.

On vous propose le jeu suivant dénommé *La prochaine est rouge* :

- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : «La prochaine carte sera rouge» ;

– le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et, par exemple, attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre rouge et noire (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur rouge.

La stratégie évidente consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins. La stratégie consistant à parier dès la première carte donne aussi une chance sur deux de gagner. Il ne faut donc ni se précipiter ni trop attendre pour avoir de bonnes chances.

La question est :
– on vous propose de jouer à ce jeu à 1 contre 2 : si vous gagnez, le meneur de jeu vous donne un franc, si vous perdez vous donnez deux francs au meneur de jeu. Devez-vous accepter, et si oui quelle méthode de jeu devez-vous adopter pour maximiser votre gain ? Une façon équivalente de poser le problème est : existe-t-il une stratégie de prédiction qui vous garantira de gagner deux fois plus souvent que vous ne perdrez ?

Réponse

La réponse est négative, mais elle est plus étonnante encore, car, quelle que soit la stratégie que vous utiliserez, vous ne pourrez jamais avoir plus d'une chance sur deux de gagner et vous ne pourrez d'ailleurs jamais non plus avoir moins d'une chance sur deux de gagner. La stratégie courte consistant à parier dès

la première carte est aussi bonne que celle consistant à attendre la dernière, et cette stratégie est équivalente à toute autre stratégie aussi compliquée ou subtile que vous pourriez imaginer.

Comme dans le problème des naissances et malgré le contexte différent d'un paquet de cartes fini qui s'épuise en vous procurant des informations sur ce qu'il reste à venir, vous ne pouvez pas changer le 1/2 : vous ne pouvez ni faire mieux ni moins bien !

Un raisonnement qui montre l'équivalence de toutes les stratégies a été récemment proposé par Michel Emery, de l'Université de Strasbourg. Il est présenté sur la figure 2.

MÉFIEZ-VOUS DES PARIS GROUPÉS

Voici pour terminer un extraordinaire paradoxe concernant les paris groupés. Pour bien en saisir la portée, examinons ce qu'est un pari groupé.

On joue avec un dé à six faces non truqué. Considérons les deux paris suivants, qui vous sont tous les deux favorables :

- Pari 1 : si c'est 6, tu gagnes 2 F, si c'est 1, tu perds 1 F, sinon rien.
- Pari 2 : si c'est 5, tu gagnes 2 F, si c'est 2, tu perds 1 F, sinon rien.

En acceptant les deux paris simultanément, vous gagnerez en moyenne deux fois plus que vous ne perdrez ; ce sera donc toujours un pari favorable pour vous.

D'une manière générale, il est clair que si l'on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun pris individuellement vous sont favorables, cela constitue un nouveau pari (que nous dénommerons le *pari groupé*), lequel vous est toujours

1. PEUT-ON MODIFIER LE RAPPORT GARÇONS/FILLES ?

Même si tous les couples adoptaient la règle de ne plus avoir d'enfants dès qu'une fille naît, ce qui semble favoriser les filles, cela n'aurait aucun effet sur le rapport garçons/fille. Montrons-le pour le cas (idéalisé) où chaque couple a des enfants indéfiniment (sans limitation du nombre) jusqu'à ce qu'une fille naisse.

- Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2. La famille est du type : [fille]
- Probabilité qu'une famille possède 2 enfants : 1/4. La famille est du type : [garçon, fille]
- Probabilité qu'une famille possède 3 enfants : 1/8. La famille est du type : [garçon, garçon, fille]
- ...
- Probabilité qu'une famille possède n enfants : $1/2^n$. La famille est du type : [garçon, garçon, ..., garçon, fille]

Calculons la proportion de garçons et de filles en ne comptant que les familles de n enfants ou moins (on fera ensuite tendre n vers l'infini).

Sur $2^n - 1$ familles, il y en aura en moyenne 2^{n-1} du type [fille], 2^{n-2} du type [garçon, fille], 2^{n-3} du type [garçon, garçon, fille]... une du type [garçon, garçon, ..., garçon, fille], etc.

Il y a donc, au total, $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = 2^n - 1$ filles.

Pour compter les garçons, le travail est un peu plus compliqué.

Nombre d'aînés : $2^{n-1} - 1$

Nombre de seconds : $2^{n-2} - 1$

Nombre de troisièmes : $2^{n-3} - 1$

...

...

Nombre de $(n-1)$ -ièmes : $2 - 1$

Nombre de n -ièmes : $1 - 1$

Au total, le nombre de garçons est donc :

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 - n = 2^n - 1 - n.$$

Le rapport filles/garçons a bien pour limite 1 à l'infini.

CQFD

2. POURQUOI VOUS GAGNEREZ UNE FOIS SUR DEUX (NI PLUS NI MOINS)

AU JEU «LA PROCHAINE EST ROUGE»

Imaginons un grand tableau composé de :

$32! = 263130836933693530167218012160000000$ lignes, chacune contenant un classement possible d'un jeu de 32 cartes.

Une stratégie consiste à fixer une règle du type «lorsque la dixième carte noire est passée, je parie que la suivante est rouge». Une stratégie ne dépend que du passé et détermine, en fonction de celui-ci, si j'arrête le meneur de jeu en lui disant «la prochaine est rouge».

Fixons une méthode de jeu. Dans chaque ligne du tableau, nous plaçons une étoile marquant l'endroit du pari, ce qui nous donne donc un tableau de $32!$ lignes, chacune contenant une étoile. Voici un exemple de ligne (l'étoile * est placée juste après la dixième carte noire et fait gagner le joueur, car une carte rouge (le R♦) suit) :

V♠, D♥, V♥, 10♠, R♠, As♠, 8♦, 8♥, 7♠, 10♦, As♥, 8♠, 9♦, V♠, D♠, D♠, As♦, 9♥, R♠, *, R♦, 7♠, 8♠, 9♠, 9♠, 10♠, As♠, V♦, D♦, R♥, 7♥, 10♥, 7♦. Nous devons évaluer le nombre de lignes où l'étoile * est suivie d'une carte rouge (partie gagnante pour le parieur) et le nombre de lignes où elle est suivie d'une carte noire (partie perdante pour le parieur).

Nous allons montrer que ces deux nombres sont égaux. Pour cela, nous opérons la transformation suivante de notre tableau : dans chaque ligne, nous permutons la carte située après l'étoile et la dernière carte.

Ainsi la ligne xx... xx*Ayy... yyB devient xx... xx*Byy... yyA

Cette transformation revient à changer l'ordre de deux lignes du tableau.

En effet, le tableau contient toutes les permutations possibles des 32 cartes, et échanger deux cartes revient à échanger deux lignes. Dans le cas où l'étoile est juste avant la dernière carte (le pari a été fait au dernier moment et la méthode permet ce choix), la ligne xx... xx*A reste identique. Au total, le tableau transformé est donc constitué des $32!$ lignes du tableau initial ; seul l'ordre des lignes a été changé.

Dans le tableau initial, il y avait exactement le même nombre de lignes se terminant par une carte noire que de lignes se terminant par une carte rouge (les rouges et les noirs ont des rôles symétriques), donc dans le tableau transformé aussi. Et donc, il a exactement le même nombre de lignes se terminant pour une carte A de couleur rouge que de lignes se terminant par une carte A de couleur noire, ce qui signifie que la stratégie fait gagner le parieur exactement une fois sur deux. Notre raisonnement ne dépend pas de la stratégie considérée et donc, quelle que soit la stratégie utilisée pour le jeu «La prochaine est rouge», elle donne une chance sur deux de gagner, ni plus ni moins.

Si vous ne croyez pas en ce raisonnement, ou qu'il vous semble faux, alors vous restez persuadé qu'au jeu «La prochaine est rouge», vous pouvez gagner plus d'une fois sur deux. Dans ce cas, prenez contact avec moi, je suis prêt à jouer le meneur de jeux à 1 contre 2 (si vous avez raison, vous gagnez un, sinon vous me donnez deux). J'accepte aussi de jouer avec 10 cartes au lieu de 32.

favorable. En bref, on a ce qu'on pourrait appeler la loi des paris groupés :
– un pari groupé de paris favorables est un pari favorable.

On peut même remarquer que le gain moyen (ou espérance mathématique) d'un pari groupé est la somme des gains moyens de chaque pari. Ici, le gain moyen pour chaque pari est de $1/6$ (une fois sur six, on gagne 2 F, une fois sur 6, on perd 1 F. Donc sur six coups, on gagne en moyenne 1 F, ce qui donne un gain moyen de $1/6$ par pari). Le gain moyen pour le pari groupé est de $2/6$, soit un tiers de franc.

Très étrangement, le mathématicien Leonid Levin, célèbre pour de nombreux travaux réalisés en théorie de la complexité, a trouvé une situation qui contredit la loi des paris groupés.

Décrire la situation va être un peu compliqué, mais le jeu en vaut la chandelle, car on a affaire à un paradoxe qui, contrairement aux deux précédents, ne semble pas avoir été résolu de façon satisfaisante. Le paradoxe est fondé sur les nombres.

Tout le monde connaît les nombres décimaux, qui sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, comme

0,132 ; -3,3211 ; 0,00012 ; -219,9 ; 75,54321 ; etc. Nous noterons D l'ensemble de tous les nombres décimaux (positifs ou négatifs).

L'ensemble des nombres réels (cette fois, les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être séparé en classes décimales : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble tous ceux dont la différence est un nombre décimal.

Par exemple on regroupe ensemble : π ; $\pi + 0,132$; $\pi - 3,3211$; etc.

Dans une autre classe on mettra $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 0,132$; $\sqrt{2} - 3,3211$; etc.

Il y a une infinité non dénombrable de classes décimales (l'argument mathématique est : si ce n'était pas le cas, l'ensemble des nombres réels serait dénombrable, ce qui est faux).

Tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité, on choisit un chef dans chaque classe décimale, ce chef (ou représentant de la classe) permettant de donner un nom à la classe. La classe dont le chef est π sera notée Classe(π). Par définition, Classe(π) est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$, avec d qui est un nombre décimal.

Puisqu'il y a une infinité de classes, il y a une infinité de chefs de classe. On note C l'ensemble de tous les chefs de classe ; D est l'ensemble des nombres décimaux. Les deux ensembles C et D ont la propriété intéressante suivante, qui résulte de leur définition : tout nombre réel s'écrit de manière unique $c + d$, avec c dans C et d dans D (c est le chef de la classe à laquelle appartient x , et d est le nombre décimal $x - c$).

Considérons maintenant le pari suivant :

– on choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Pour cela, on choisit un point quelconque sur un segment de longueur 1 et on mesure sa distance à une extrémité choisie comme origine, ou, ce qui revient au même, on lance un dé à 10 faces indéfiniment et on note tous les chiffres obtenus qui déterminent un nombre réel comme 0,271828182845...).

– le nombre tiré x s'écrit sous la forme $c + d$, avec c , un chef, et d , un décimal ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + 0,7$, vous gagnez 2 F ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + 0,9$, vous perdez 1 F ;

– sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable, car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez (comme tout à l'heure avec le dé à six faces). Plus généralement soit d et d' deux nombres décimaux quelconques,