

2. POURQUOI VOUS GAGNEREZ UNE FOIS SUR DEUX (NI PLUS NI MOINS)

AU JEU «LA PROCHAINE EST ROUGE»

Imaginons un grand tableau composé de :

$32! = 263130836933693530167218012160000000$ lignes, chacune contenant un classement possible d'un jeu de 32 cartes.

Une stratégie consiste à fixer une règle du type «lorsque la dixième carte noire est passée, je parie que la suivante est rouge». Une stratégie ne dépend que du passé et détermine, en fonction de celui-ci, si j'arrête le meneur de jeu en lui disant «la prochaine est rouge».

Fixons une méthode de jeu. Dans chaque ligne du tableau, nous plaçons une étoile marquant l'endroit du pari, ce qui nous donne donc un tableau de $32!$ lignes, chacune contenant une étoile. Voici un exemple de ligne (l'étoile * est placée juste après la dixième carte noire et fait gagner le joueur, car une carte rouge (le R♦) suit) :

V♣, D♥, V♥, 10♠, R♠, As♣, 8♦, 8♥, 7♣, 10♦, As♥, 8♣, 9♦, V♠, D♣, D♠, As♦, 9♥, R♣, *, R♦, 7♠, 8♠, 9♣, 9♠, 10♣, As♠, V♦, D♦, R♥, 7♥, 10♥, 7♦. Nous devons évaluer le nombre de lignes où l'étoile * est suivie d'une carte rouge (partie gagnante pour le parieur) et le nombre de lignes où elle est suivie d'une carte noire (partie perdante pour le parieur).

Nous allons montrer que ces deux nombres sont égaux. Pour cela, nous opérons la transformation suivante de notre tableau : dans chaque ligne, nous permutons la carte située après l'étoile et la dernière carte.

Ainsi la ligne xx... xx*Ayy... yyB devient xx... xx*Byy... yyA

Cette transformation revient à changer l'ordre de deux lignes du tableau.

En effet, le tableau contient toutes les permutations possibles des 32 cartes, et échanger deux cartes revient à échanger deux lignes. Dans le cas où l'étoile est juste avant la dernière carte (le pari a été fait au dernier moment et la méthode permet ce choix), la ligne xx... xx*A reste identique. Au total, le tableau transformé est donc constitué des $32!$ lignes du tableau initial ; seul l'ordre des lignes a été changé.

Dans le tableau initial, il y avait exactement le même nombre de lignes se terminant par une carte noire que de lignes se terminant par une carte rouge (les rouges et les noirs ont des rôles symétriques), donc dans le tableau transformé aussi. Et donc, il a exactement le même nombre de lignes se terminant pour une carte A de couleur rouge que de lignes se terminant par une carte A de couleur noire, ce qui signifie que la stratégie fait gagner le parieur exactement une fois sur deux. Notre raisonnement ne dépend pas de la stratégie considérée et donc, quelle que soit la stratégie utilisée pour le jeu «La prochaine est rouge», elle donne une chance sur deux de gagner, ni plus ni moins.

Si vous ne croyez pas en ce raisonnement, ou qu'il vous semble faux, alors vous restez persuadé qu'au jeu «La prochaine est rouge», vous pouvez gagner plus d'une fois sur deux. Dans ce cas, prenez contact avec moi, je suis prêt à jouer le meneur de jeux à 1 contre 2 (si vous avez raison, vous gagnez un, sinon vous me donnez deux). J'accepte aussi de jouer avec 10 cartes au lieu de 32.

favorable. En bref, on a ce qu'on pourrait appeler la loi des paris groupés :
– un pari groupé de paris favorables est un pari favorable.

On peut même remarquer que le gain moyen (ou espérance mathématique) d'un pari groupé est la somme des gains moyens de chaque pari. Ici, le gain moyen pour chaque pari est de $1/6$ (une fois sur six, on gagne 2 F, une fois sur 6, on perd 1 F. Donc sur six coups, on gagne en moyenne 1 F, ce qui donne un gain moyen de $1/6$ par pari). Le gain moyen pour le pari groupé est de $2/6$, soit un tiers de franc.

Très étrangement, le mathématicien Leonid Levin, célèbre pour de nombreux travaux réalisés en théorie de la complexité, a trouvé une situation qui contredit la loi des paris groupés.

Décrire la situation va être un peu compliqué, mais le jeu en vaut la chandelle, car on a affaire à un paradoxe qui, contrairement aux deux précédents, ne semble pas avoir été résolu de façon satisfaisante. Le paradoxe est fondé sur les nombres.

Tout le monde connaît les nombres décimaux, qui sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, comme

0,132 ; -3,3211 ; 0,00012 ; -219,9 ; 75,54321 ; etc. Nous noterons D l'ensemble de tous les nombres décimaux (positifs ou négatifs).

L'ensemble des nombres réels (cette fois, les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être séparé en classes décimales : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble tous ceux dont la différence est un nombre décimal.

Par exemple on regroupe ensemble : π ; $\pi + 0,132$; $\pi - 3,3211$; etc.

Dans une autre classe on mettra $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 0,132$; $\sqrt{2} - 3,3211$; etc.

Il y a une infinité non dénombrable de classes décimales (l'argument mathématique est : si ce n'était pas le cas, l'ensemble des nombres réels serait dénombrable, ce qui est faux).

Tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité, on choisit un chef dans chaque classe décimale, ce chef (ou représentant de la classe) permettant de donner un nom à la classe. La classe dont le chef est π sera notée Classe(π). Par définition, Classe(π) est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$, avec d qui est un nombre décimal.

Puisqu'il y a une infinité de classes, il y a une infinité de chefs de classe. On note C l'ensemble de tous les chefs de classe ; D est l'ensemble des nombres décimaux. Les deux ensembles C et D ont la propriété intéressante suivante, qui résulte de leur définition : tout nombre réel s'écrit de manière unique $c + d$, avec c dans C et d dans D (c est le chef de la classe à laquelle appartient x , et d est le nombre décimal $x - c$).

Considérons maintenant le pari suivant :

– on choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Pour cela, on choisit un point quelconque sur un segment de longueur 1 et on mesure sa distance à une extrémité choisie comme origine, ou, ce qui revient au même, on lance un dé à 10 faces indéfiniment et on note tous les chiffres obtenus qui déterminent un nombre réel comme 0,271828182845...).

– le nombre tiré x s'écrit sous la forme $c + d$, avec c , un chef, et d , un décimal ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + 0,7$, vous gagnez 2 F ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + 0,9$, vous perdez 1 F ;

– sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable, car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez (comme tout à l'heure avec le dé à six faces). Plus généralement soit d et d' deux nombres décimaux quelconques,

nous considérerons le pari suivant que nous noterons $P(d; d')$:

- nous choisissons un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Nous déterminons sa classe c ;
- si le nombre choisi est de la forme $c + d$, vous gagnez 2 F ;
- si le nombre choisi est de la forme $c + d'$, vous perdez 1 F ;
- sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Si l'on vous propose le pari $P(d; d')$, vous devez l'accepter, car le nombre x choisi a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Comme précédemment, le pari vous est favorable, car vous gagnez plus que vous ne risquez.

On peut détailler l'argument indiquant que x a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Si on représente sur un cercle de périmètre 1, muni d'une origine l'ensemble des cas qui vous sont favorables (tous les nombres réels entre 0 et 1 de la forme $c + d$ avec c un chef), et qu'on fait tourner cet ensemble de $d' - d$, on obtient exactement l'ensemble des cas qui vous sont défavorables (les nombres de la forme $c + d'$). L'ensemble des cas défavorables s'obtenant par rotation de l'ensemble des cas favorables, en choisissant un point au hasard sur le cercle, on a bien autant de chances de tomber sur un cas favorable que sur un cas défavorable. Comme les cas favorables rapportent le double de ce que coûtent les cas défavorables, il faut accepter le pari.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément, on vous propose le pari $P(0,235; 0,35)$ en même temps que le pari $P(0,78432; 0,8432)$ et tous les paris de la forme $P(d, d')$, où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d . Ce pari groupe des paris favorables. Vous brûlez d'envie de l'accepter.

Pourtant, si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car, très étrangement, il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme $\pi + 0,321$. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :
 – vous avez gagné le pari $P(0,321; 0,21)$, ce qui vous rapporte 2 F
 – vous avez perdu le pari $P(0,0321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F ;
 – vous avez perdu le pari $P(0,1321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F
 – etc. pour tous les paris $P(0,2321; 0,321)$
 $P(0,3321; 0,321) \dots P(0,9321; 0,321)$.

Au total vous avez perdu dix paris (donc 10 F) et vous avez gagné 2 F. Bilan : le pari groupé vous coûte 8 F à chaque fois. Bien sûr, quel que soit le nombre x

3. LE PARADOXE DES PARIS GROUPÉS

Les nombres décimaux sont un sous-ensemble des nombres réels.

NOMBRES RÉELS

π $\sqrt{2}$ e $0,01658$ $0,154$ $0,12345678\dots$ $55,1587\dots$

NOMBRES DÉCIMAUX

$0,154$ $0,325456$ $0,01658$ $0,01658$ $-3,2254$ $+48,245$

Tout nombre est classé dans une classe décimale associée à un chef réel.

**CLASSE DÉCIMALE DE CHEF x
X + UN NOMBRE DÉCIMAL**

**CLASSE DÉCIMALE DE CHEF e
e + UN NOMBRE DÉCIMAL**

$e - 3,2254$ $e + 48,245$
 $e - 0,154$ $e - 3,2254$

**CLASSE DÉCIMALE DE CHEF $\sqrt{3}$
 $\sqrt{3}$ + UN NOMBRE DÉCIMAL**

$\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} + 48,245$
 $\sqrt{3} - 0,154$

**CLASSE DÉCIMALE DE CHEF π
 π + UN NOMBRE DÉCIMAL**

$\pi - 3,2254$ $\pi + 48,245$
 $\pi - 0,154$ $\pi - 3,2254$

On tire au hasard un nombre entre 0 et 1.

x

On détermine la classe C de x : $x = c + d$. Dans le pari simple, vous avez parié sur d égal à 0,7. Si la partie décimale d du nombre x tiré est égale à 0,7, vous gagnez 2 F. Si le nombre x tiré a pour partie décimale d' , égale à 0,9, vous perdez 1 F. Sinon, personne ne gagne ni ne perd. On désigne ce pari par $P(d; d') = P(0,7; 0,9)$. Ce pari vous est favorable. On vous propose le pari groupé P_G de la forme $P_G(d; d')$, où d est un nombre décimal quelconque et où d' est calculé à partir de d en enlevant le premier chiffre après la virgule de d . Vous gagnerez 2 F si la partie décimale x du nombre tiré est égale à d et vous perdrez 1 F si elle est égale à d' . Chaque pari pour une valeur donnée de d vous est favorable. Supposons que la partie décimale d du nombre x tiré au hasard soit égale à 0,321. Comme dans votre pari groupé, $P_G(d, d')$, d est n'importe quel nombre décimal, vous gagnez 2 F, car $P(0,321, 0,0321)$ est un élément de l'ensemble des paris groupés, mais vous perdez 1 F pour tous les nombres décimaux des paris $P(0,321, 0,321)$ où A est égal à 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, car d' est alors égal au nombre tiré. Vous gagnez 2 F une fois et vous perdez 1 F dix fois, donc à toutes les parties, vous perdez 8 F... Ceci se produira quel que soit le nombre x tiré. Le pari groupé est une catastrophe.

choisi la situation est semblable et vous perdez donc 8F à chaque fois. (Dans le cas où le nombre choisi au hasard est 0, la situation est particulière : vous ne gagnez même pas 2 F et perdez donc 10 F d'un coup.)

Comment expliquer qu'un pari groupé de paris favorables vous soit défavorable?

Réponses

En fait, je ne connais pour l'instant aucune explication totalement satisfaisante au paradoxe de Levin. Je vais donc fournir plusieurs pistes avec à chaque fois une critique et je suggère

aux lecteurs de *Pour la science* de me donner leur avis.

(a) *Première possibilité d'explication : l'axiome du choix.*

Il faut remarquer que nous utilisons l'axiome du choix. Lorsque nous disons que nous pouvons prendre un chef dans chaque classe, nous sommes en train d'utiliser l'axiome du choix. Cet axiome indique que lorsqu'on a un ensemble d'ensembles non vides (ici les classes décimales) il est possible de prendre un élément de chaque ensemble et de les regrouper pour faire un nouvel ensemble (c'est de cette façon