

nous considérerons le pari suivant que nous noterons $P(d; d')$:

– nous choisissons un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Nous déterminons sa classe c ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + d$, vous gagnez 2 F ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + d'$, vous perdez 1 F ;

– sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Si l'on vous propose le pari $P(d; d')$, vous devez l'accepter, car le nombre x choisi a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Comme précédemment, le pari vous est favorable, car vous gagnez plus que vous ne risquez.

On peut détailler l'argument indiquant que x a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Si on représente sur un cercle de périmètre 1, muni d'une origine l'ensemble des cas qui vous sont favorables (tous les nombres réels entre 0 et 1 de la forme $c + d$ avec c un chef), et qu'on fait tourner cet ensemble de $d' - d$, on obtient exactement l'ensemble des cas qui vous sont défavorables (les nombres de la forme $c + d'$). L'ensemble des cas défavorables s'obtenant par rotation de l'ensemble des cas favorables, en choisissant un point au hasard sur le cercle, on a bien autant de chances de tomber sur un cas favorable que sur un cas défavorable. Comme les cas favorables rapportent le double de ce que coûtent les cas défavorables, il faut accepter le pari.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément, on vous propose le pari $P(0,235; 0,35)$ en même temps que le pari $P(0,78432; 0,8432)$ et tous les paris de la forme $P(d, d')$, où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d . Ce pari groupe des paris favorables. Vous brûlez d'envie de l'accepter.

Pourtant, si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car, très étrangement, il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme $\pi + 0,321$. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :
– vous avez gagné le pari $P(0,321; 0,21)$, ce qui vous rapporte 2 F
– vous avez perdu le pari $P(0,0321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F ;
– vous avez perdu le pari $P(0,1321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F
– etc. pour tous les paris $P(0,2321; 0,321)$
 $P(0,3321; 0,321) \dots P(0,9321; 0,321)$.

Au total vous avez perdu dix paris (donc 10 F) et vous avez gagné 2 F. Bilan : le pari groupé vous coûte 8 F à chaque fois. Bien sûr, quel que soit le nombre x

3. LE PARADOXE DES PARIS GROUPÉS

Les nombres décimaux sont un sous-ensemble des nombres réels.

NOMBRES RÉELS

π $\sqrt{2}$ e $0,01658$ $0,154$
 $\sqrt{3}$ $0,12345678\dots$ $55,1587\dots$

NOMBRES DÉCIMAUX

$0,154$ $0,325456$ $0,01658$
 $0,01658$ $+ 48,245$ $- 3,2254$

Tout nombre est classé dans une classe décimale associée à un chef réel.

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF X
X + UN NOMBRE DÉCIMAL

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF e
e + UN NOMBRE DÉCIMAL

$e - 3,2254$ $e + 48,245$
 $e - 0,154$ $e - 3,2254$

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF $\sqrt{3}$
 $\sqrt{3}$ + UN NOMBRE DÉCIMAL

$\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} + 48,245$
 $\sqrt{3} - 0,154$

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF π
 π + UN NOMBRE DÉCIMAL

$\pi - 3,2254$ $\pi + 48,245$
 $\pi - 0,154$ $\pi - 3,2254$

On tire au hasard un nombre entre 0 et 1.

x

On détermine la classe C de x : $x = c + d$. Dans le pari simple, vous avez parié sur d égal à 0,7. Si la partie décimale d du nombre x tiré est égale à 0,7, vous gagnez 2 F. Si le nombre x tiré a pour partie décimale d' , égale à 0,9, vous perdez 1 F. Sinon, personne ne gagne ni ne perd. On désigne ce pari par $P(d; d') = P(0,7; 0,9)$. Ce pari vous est favorable. On vous propose le pari groupé P_G de la forme $P_G(d; d')$, où d est un nombre décimal quelconque et où d' est calculé à partir de d en enlevant le premier chiffre après la virgule de d . Vous gagnerez 2 F si la partie décimale x du nombre tiré est égale à d et vous perdrez 1 F si elle est égale à d' . Chaque pari pour une valeur donnée de d vous est favorable. Supposons que la partie décimale d du nombre x tiré au hasard soit égale à 0,321. Comme dans votre pari groupé, $P_G(d, d')$, d est n'importe quel nombre décimal, vous gagnez 2 F, car $P(0,321, 0,0321)$ est un élément de l'ensemble des paris groupés, mais vous perdez 1 F pour tous les nombres décimaux des paris $P(0, \text{A}321, 0,321)$ où A est égal à 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, car d' est alors égal au nombre tiré. Vous gagnez 2 F une fois et vous perdez 1 F dix fois, donc à toutes les parties, vous perdez 8 F... Ceci se produira quel que soit le nombre x tiré. Le pari groupé est une catastrophe.

choisi la situation est semblable et vous perdez donc 8F à chaque fois. (Dans le cas où le nombre choisi au hasard est 0, la situation est particulière : vous ne gagnez même pas 2 F et perdez donc 10 F d'un coup.)

Comment expliquer qu'un pari groupé de paris favorables vous soit défavorable ?

Réponses

En fait, je ne connais pour l'instant aucune explication totalement satisfaisante au paradoxe de Levin. Je vais donc fournir plusieurs pistes avec à chaque fois une critique et je suggère

aux lecteurs de *Pour la science* de me donner leur avis.

(a) *Première possibilité d'explication : l'axiome du choix.*

Il faut remarquer que nous utilisons l'axiome du choix. Lorsque nous disons que nous pouvons prendre un chef dans chaque classe, nous sommes en train d'utiliser l'axiome du choix. Cet axiome indique que lorsqu'on a un ensemble d'ensembles non vides (ici les classes décimales) il est possible de prendre un élément de chaque ensemble et de les regrouper pour faire un nouvel ensemble (c'est de cette façon