

nous considérerons le pari suivant que nous noterons $P(d; d')$:

– nous choisissons un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Nous déterminons sa classe c ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + d$, vous gagnez 2 F ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + d'$, vous perdez 1 F ;

– sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Si l'on vous propose le pari $P(d; d')$, vous devez l'accepter, car le nombre x choisi a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Comme précédemment, le pari vous est favorable, car vous gagnez plus que vous ne risquez.

On peut détailler l'argument indiquant que x a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Si on représente sur un cercle de périmètre 1, muni d'une origine l'ensemble des cas qui vous sont favorables (tous les nombres réels entre 0 et 1 de la forme $c + d$ avec c un chef), et qu'on fait tourner cet ensemble de $d' - d$, on obtient exactement l'ensemble des cas qui vous sont défavorables (les nombres de la forme $c + d'$). L'ensemble des cas défavorables s'obtenant par rotation de l'ensemble des cas favorables, en choisissant un point au hasard sur le cercle, on a bien autant de chances de tomber sur un cas favorable que sur un cas défavorable. Comme les cas favorables rapportent le double de ce que coûtent les cas défavorables, il faut accepter le pari.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément, on vous propose le pari $P(0,235; 0,35)$ en même temps que le pari $P(0,78432; 0,8432)$ et tous les paris de la forme $P(d, d')$, où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d . Ce pari groupe des paris favorables. Vous brûlez d'envie de l'accepter.

Pourtant, si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car, très étrangement, il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme $\pi + 0,321$. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :
– vous avez gagné le pari $P(0,321; 0,21)$, ce qui vous rapporte 2 F
– vous avez perdu le pari $P(0,0321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F ;
– vous avez perdu le pari $P(0,1321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F
– etc. pour tous les paris $P(0,2321; 0,321)$
 $P(0,3321; 0,321) \dots P(0,9321; 0,321)$.

Au total vous avez perdu dix paris (donc 10 F) et vous avez gagné 2 F. Bilan : le pari groupé vous coûte 8 F à chaque fois. Bien sûr, quel que soit le nombre x

3. LE PARADOXE DES PARIS GROUPÉS

Les nombres décimaux sont un sous-ensemble des nombres réels.

NOMBRES RÉELS

π $\sqrt{2}$ e $0,01658$ $0,154$
 $\sqrt{3}$ $0,12345678\dots$ $55,1587\dots$

NOMBRES DÉCIMAUX

$0,154$ $0,325456$ $0,01658$
 $0,01658$ $+ 48,245$ $- 3,2254$

Tout nombre est classé dans une classe décimale associée à un chef réel.

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF x
 x + UN NOMBRE DÉCIMAL

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF e
 e + UN NOMBRE DÉCIMAL

$e - 3,2254$ $e + 48,245$
 $e - 0,154$ $e - 3,2254$

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF $\sqrt{3}$
 $\sqrt{3}$ + UN NOMBRE DÉCIMAL

$\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} + 48,245$
 $\sqrt{3} - 0,154$

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF π
 π + UN NOMBRE DÉCIMAL

$\pi - 3,2254$ $\pi + 48,245$
 $\pi - 0,154$ $\pi - 3,2254$

On tire au hasard un nombre entre 0 et 1.

x

On détermine la classe C de x : $x = c + d$. Dans le pari simple, vous avez parié sur d égal à 0,7. Si la partie décimale d du nombre x tiré est égale à 0,7, vous gagnez 2 F. Si le nombre x tiré a pour partie décimale d' , égale à 0,9, vous perdez 1 F. Sinon, personne ne gagne ni ne perd. On désigne ce pari par $P(d; d') = P(0,7; 0,9)$. Ce pari vous est favorable. On vous propose le pari groupé P_G de la forme $P_G(d; d')$, où d est un nombre décimal quelconque et où d' est calculé à partir de d en enlevant le premier chiffre après la virgule de d . Vous gagnerez 2 F si la partie décimale x du nombre tiré est égale à d et vous perdrez 1 F si elle est égale à d' . Chaque pari pour une valeur donnée de d vous est favorable. Supposons que la partie décimale d du nombre x tiré au hasard soit égale à 0,321. Comme dans votre pari groupé, $P_G(d, d')$, d est n'importe quel nombre décimal, vous gagnez 2 F, car $P(0,321, 0,0321)$ est un élément de l'ensemble des paris groupés, mais vous perdez 1 F pour tous les nombres décimaux des paris $P(0,4321, 0,321)$ où A est égal à 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, car d' est alors égal au nombre tiré. Vous gagnez 2 F une fois et vous perdez 1 F dix fois, donc à toutes les parties, vous perdez 8 F... Ceci se produira quel que soit le nombre x tiré. Le pari groupé est une catastrophe.

choisi la situation est semblable et vous perdez donc 8 F à chaque fois. (Dans le cas où le nombre choisi au hasard est 0, la situation est particulière : vous ne gagnez même pas 2 F et perdez donc 10 F d'un coup.)

Comment expliquer qu'un pari groupé de paris favorables vous soit défavorable ?

Réponses

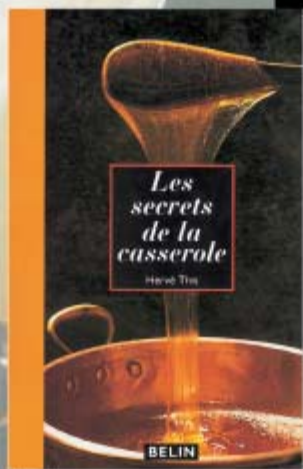
En fait, je ne connais pour l'instant aucune explication totalement satisfaisante au paradoxe de Levin. Je vais donc fournir plusieurs pistes avec à chaque fois une critique et je suggère

aux lecteurs de *Pour la science* de me donner leur avis.

(a) *Première possibilité d'explication : l'axiome du choix.*

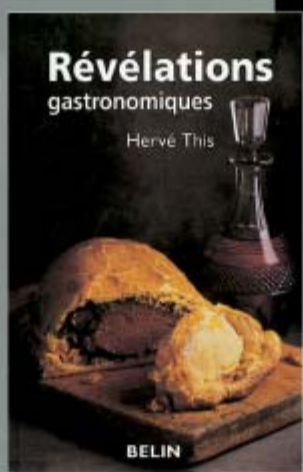
Il faut remarquer que nous utilisons l'axiome du choix. Lorsque nous disons que nous pouvons prendre un chef dans chaque classe, nous sommes en train d'utiliser l'axiome du choix. Cet axiome indique que lorsqu'on a un ensemble d'ensembles non vides (ici les classes décimales) il est possible de prendre un élément de chaque ensemble et de les regrouper pour faire un nouvel ensemble (c'est de cette façon

Une nouvelle rencontre de la science et de l'art.



LES SECRETS DE LA CASSEROLE

Comment préparer plus de 20 litres de mayonnaise à partir d'un seul jaune d'œuf ? En explorant la physique des émulsions. Comment obtenir un bon rôti ? En empruntant à la chimie ses études des sucres et des acides aminés. Comment obtenir de bonnes gelées ? En reprenant les résultats récents de la physico-chimie des gels. Code 001585 - 130 F-19,82 € 224 pages



RÉVÉLATIONS GASTRONOMIQUES

Encore un livre de recettes ! Oui, mais des recettes garanties par des expérimentations rigoureuses, par des analyses physico-chimiques des aliments et des tours de main culinaires. Chaque geste culinaire est ici disséqué, commenté du triple point de vue culinaire, physico-chimique et gastronomique. Code 001756 - 130 F-19,82 € 320 pages

Ces deux ouvrages ont obtenu le Prix de l'Académie nationale de Cuisine 1997.

LA CASSEROLE DES ENFANTS

Laissés seuls pour la soirée, deux enfants doivent cuisiner leur dîner. Mais leur sens aigu de l'observation et de l'expérimentation leur fait découvrir les bases de la chimie et de la physique. Ce livre pourrait être un manuel, s'il n'évoquait les molécules et leurs transformations de façon si simple et si amusante.

Code 002309 - 80 F - 12,20 € - 128 pages



BELIN

Voir bon de commande page 96

que nous avons constitué l'ensemble C des chefs de classe). On sait que l'axiome du choix engendre des situations paradoxales, et ce qui se passe ici n'est qu'un exemple nouveau de ces situations paradoxales provoquées par l'axiome du choix.

Critique : l'axiome du choix engendre des situations choquantes pour l'intuition, mais jamais de vraies contradictions. Ici, il est tellement absurde qu'un groupement de paris favorables devienne défavorable qu'on a affaire à un problème de grave incohérence. Notons aussi qu'habituellement, l'axiome du choix est accepté. Doit-on décider de ne plus l'utiliser en probabilité ?

(b) Deuxième possibilité d'explication : la loi des paris groupés.

La règle qu'un pari groupé composé de paris favorables est favorable n'est peut-être pas vraie en général. Notre intuition nous souffle cette loi, mais elle se trompe peut-être, comme cela lui arrive.

Critique : on prouve sans mal qu'un pari groupé composé d'un nombre fini de paris favorables est favorable. Précisément, l'espérance de gain d'un pari groupé est la somme des espérances de gain des paris individuels. Dans le cas infini la situation est la même et une somme infinie de gains moyens positifs est bien évidemment positive. La loi des paris groupés est bonne et on ne peut la refuser.

(c) Troisième possibilité d'explication : les probabilités continues.

Dans le pari considéré, on tire un nombre réel au hasard. Or cela n'est pas possible en pratique et d'ailleurs, concrètement, on ne pourrait pas mettre en œuvre le pari comme c'est suggéré en prenant un point au hasard sur une droite ou en lançant une infinité de fois un dé à dix faces.

Critique : en théorie des probabilités, on considère sans arrêt des situations analogues et la théorie de la mesure donne un sens précis à l'idée d'un nombre réel tiré au hasard entre 0 et 1. Si ce type de tirage continu n'a pas de sens, pourquoi tant de livres lui sont-ils consacrés ? Et s'il a un sens habituellement (et est utile concrètement dans de nombreuses applications), pourquoi ici n'en aurait-il pas ?

Je supplie donc les lecteurs de m'indiquer une réponse plus satisfaisante.

A Bet with Leonid Levin, in The Mathematical Intelligencer, vol. 23, n° 1, p. 42, 2001.

Michel EMERY, Quelques phénomènes curieux en probabilités et statistiques, in L'Ouvrier, 2001, article à paraître.