

Entrez dans le quadrille

DENNIS SHASHA

Une chorégraphe sollicite votre aide pour son prochain spectacle.

Concentré sur la recherche de la solution de l'énigme du mois dernier, vous ne voyez pas arriver dans votre bureau la chorégraphe de la célèbre compagnie «102 sus, 2 sous» qui a fait un triomphe la saison passée. Elle a besoin de vos talents pour résoudre un problème qui entrave la mise au point de son prochain ballet. Après lui avoir juré de garder le secret le plus absolu sur votre (éventuelle) participation, elle vous expose la situation.

«Ma compagnie est composée de 12 hommes (*les carrés bleus sur la figure*) et de 20 femmes (*en rose*). Avant le final, les hommes encerclent les femmes selon cette disposition.»

Elle dessine une configuration (*voir la figure ci-contre*) sur le verso d'une feuille sans se soucier du recto, puis poursuit.

«Je veux qu'après seulement trois mouvements, les femmes encerclent les hommes de cette façon.»

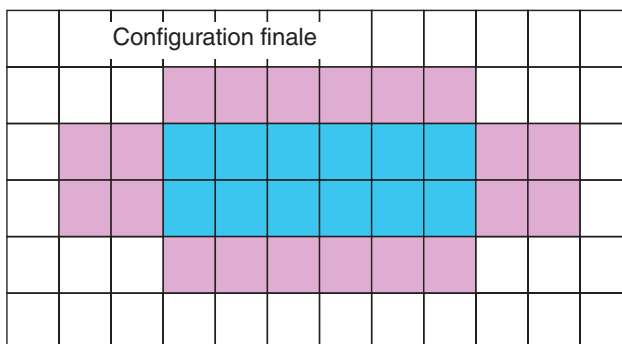
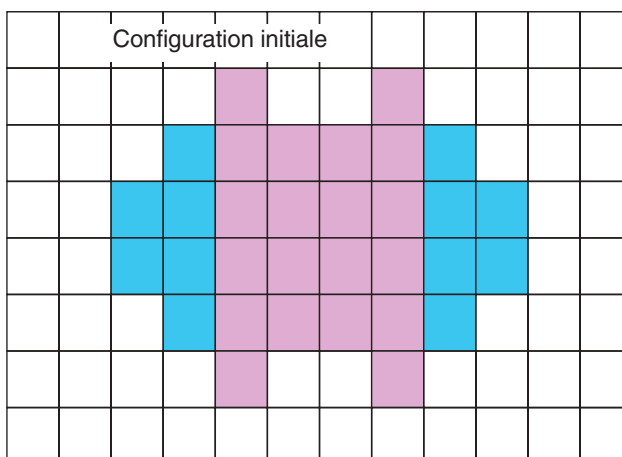
Elle dessine alors la deuxième configuration.

«Pendant chaque mouvement, un danseur peut rester sur place ou se déplacer d'un pas dans l'une des quatre directions : à gauche, à droite, en avant ou en arrière. J'impose deux conditions. D'une part, deux danseurs ne peuvent s'échanger leur place pendant un mouvement, d'autre part, deux danseurs ne peuvent être à la même place à la fin d'un mouvement. J'évite toute collision.»

«Vous avez les configurations initiale et finale, déterminez-moi les déplacements de chaque danseur à chaque mouvement!»

Son exposé terminé, elle s'assied, bien décidée à ne partir qu'avec la solution. À vous de l'aider... Pour ce faire, pensez à vous munir d'un papier quadrillé.

La solution de l'énigme sera donnée le mois prochain, et sera bientôt disponible sur le site Internet : www.pourlascience.com



Solution du problème d'énigmatics du numéro 286

Pour le premier problème, vous pouvez espérer gagner 9 309,091 euros. Définissons $S(x, t, n)$, la somme dont vous disposerez à la fin de la série de paris quand vous avez x euros, quand il reste t jets de pièce et que l'oracle a n mensonges à sa disposition (n est égal à 1 ou à 0).

Lorsque vous avez à jouer t fois, que l'oracle ne peut plus mentir et que vous avez x euros, vous pariez tout votre argent à chaque fois : $S(x, t, 0) = x \cdot 2^t$. Dans le cas où il reste un pari et que l'oracle peut encore mentir, vous ne pariez rien : $S(x, 1, 1) = x$.

Calculons $S(x, t+1, 1)$. Si vous mettez en jeu b euros au pari suivant, soit l'oracle ment et vous finirez la partie avec $S(x - b, t, 0)$, soit l'oracle ne ment pas cette fois et vous aurez $S(x + b, t, 0)$. Opti-

miser le gain consiste à évaluer $S(x - b, t, 0)$ et $S(x + b, t, 0)$, car l'oracle vous ferait choisir la pire solution. Étudions l'équation $S(x - b, t, 0) = S(x + b, t, 0)$.

$S(x, 1, 1) = x$, $S(x, 1, 0) = 2x$, $S(x, t, 0) = x \cdot 2^t$, $S(x, 2, 1) = 4x/3$ (vous avez parié $x/3$), $S(x, 3, 1) = 2x$ (vous avez parié $x/2$). Pour $S(x, 4, 1)$, on résout $S(x - b, 3, 0) = S(x + b, 3, 1)$. Soit $8(x - b) = 2(x + b)$. $b = 6x/10$ et $S(x, 4, 1) = 32x/10$. Et ainsi de suite...

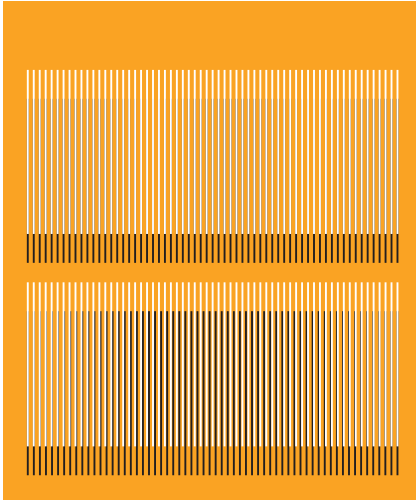
Ainsi, $S(100, 2, 1) = 133,33$ euros,
 $S(100, 3, 1) = 200$ euros,
 $S(100, 4, 1) = 320$ euros,
 $S(100, 5, 1) = 533,33$ euros,
 $S(100, 6, 1) = 914,28$ euros,
 $S(100, 7, 1) = 1600$ euros,
 $S(100, 8, 1) = 2\,844,44$ euros,
 $S(100, 9, 1) = 5\,120$ euros,
 $S(100, 10, 1) = 9\,309,09$ euros,

$S(100, 11, 1) = 17\,066,67$ euros. Après 20 jets de pièce, vous auriez plusieurs millions d'euros!

Pour le second problème, quand vous devez parier à l'avance, vous n'aurez au final que 1 600 euros au mieux. Créons de nouveau deux fonctions. $M(n)$ est le montant minimal que vous êtes sûr d'avoir après n jets si le mensonge a déjà eu lieu : $M(n) = 100 +$ les sommes des $n - 1$ paris – la somme du pari le plus élevé.

$V(n)$ est la somme que vous avez après n jets quand le mensonge est encore à venir. $V(n) = 100 +$ tous les paris gagnés.

La meilleure stratégie qui se présente est de parier successivement : 50 ; 50 ; 100 ; 100 ; 200 ; 200 ; 400 ; 400 ; 800 ; 800. Ce qui se traduit par les gains successifs suivants : 50 ; 100 ; 100 ; 200 ; 200 ; 400 ; 400 ; 800 ; 800 ; 1600.



Les moirés de Vasarély

LOÏC MANGIN

L'œuvre de Vasarély nous invite à une promenade entre la physique et les mathématiques.

«Un mathématicien est un faiseur de motifs. Ces motifs, comme ceux des peintres ou des poètes, doivent être beaux ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler harmonieusement.»

Godfrey Hardy

En 1965, au musée d'Art moderne de New York, sont regroupées pour la première fois les œuvres dites d'art optique, car elles jouent sur les illusions perceptives, les effets de moirés, les scintillements... Parmi les artistes que l'on y admire figurent François Morelet, et surtout l'initiateur de cette forme d'art, le peintre français d'origine hongroise Victor Vasarély (1906-1997). Par son succès auprès des critiques et du public, Vasarély est rapidement baptisé «l'inventeur de l'art optique». À cette époque, l'engouement est tel que de nombreuses revues, de *Vogue* à *Scientific American*, font leur couverture des œuvres d'art optique. Les uns pour leur esthétique, les autres pour leur rigueur géométrique.

Victor Vasarély a fréquenté le Műhely de Budapest, l'équivalent hongrois du Bauhaus, l'école d'art fondée à Weimar en 1919 par Walter Gropius. Pour ce dernier, le but de toute activité plastique est la construction et l'architecture. Vasa-

rély a ainsi suivi, indirectement, les enseignements des professeurs de l'école disparue en 1933, tels Josef Albers (1888-1976), Paul Klee (1879-1940) ou Wassily Kandinsky (1866-1944), les inventeurs de l'art abstrait.

Installé à Paris en 1930, il devient l'un des maîtres de l'abstraction géométrique et concrétise dans ses œuvres ses recherches théoriques, notamment celles sur la perspective. En 1953, dans une série nommée *Transparence*, il joue avec les effets de moirés (voir la figure 3), où un motif périodique de lignes est couvert du même motif (ou de son négatif) imprimé sur un support transparent. De petits déplacements de ce dernier créent les motifs moirés. Survolons les bases mathématiques de ces figures, ainsi que les services qu'elles rendent aux physiciens.

Le moiré le plus simple apparaît quand deux séries identiques de lignes verticales régulièrement espacées sont superposées avec un léger décalage ou une rotation de quelques degrés. De larges rayures sombres apparaissent : plus l'alignement est parfait, plus ces rayures sont espacées.

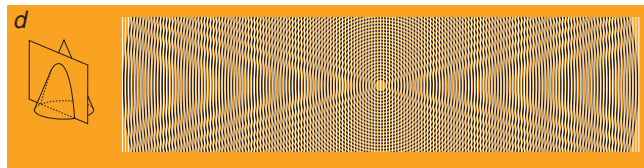
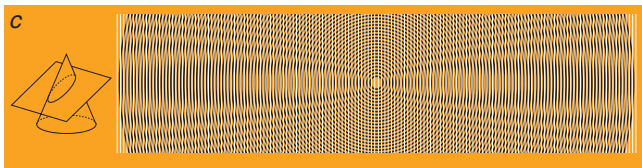
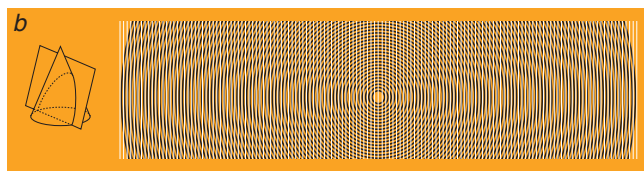
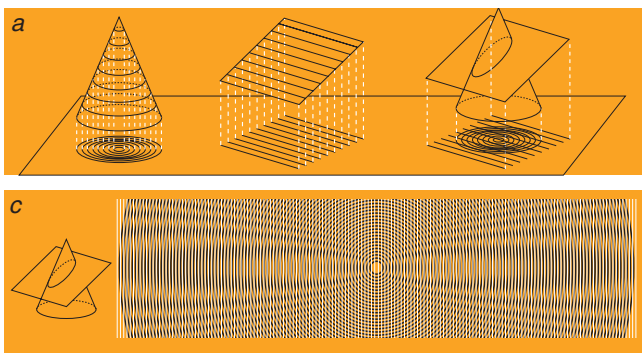
Pour comprendre l'origine des figures de moirés, considérons-les en termes de géométrie projective. Ce domaine des mathématiques est celui

des objets d'un espace à trois dimensions projetés sur un espace à deux dimensions. Par exemple, quand on projette les intersections d'un cône avec une série de plans, parallèles à sa base et équidistants, on obtient sur un plan de projection parallèle à la base du cône une série de cercles concentriques (voir la figure 1).

De la même façon, les intersections d'un plan incliné par une série de plans perpendiculaires au plan de projection se projettent en une série de lignes parallèles. Ces lignes parallèles sont d'autant plus écartées que le plan initial est incliné par rapport au plan de projection.

Ainsi, en géométrie projective, un cône est équivalent à une série de cercles concentriques et un plan, à une grille. Quels motifs moirés apparaissent lors de la superposition des cercles concentriques et de la grille ? Des ellipses, des hyperboles, des paraboles (voir la figure 1), c'est-à-dire les différentes intersections d'un plan et d'un cône, ce que les mathématiciens nomment les sections coniques.

Quand l'espacement de la grille est environ égal à celui des cercles concentriques, les figures de moirés obtenues sont des paraboles (1b). Lorsque l'espacement augmente, c'est-à-dire que le plan initial est de plus en plus hori-



1. Les figures de moirés résultent de la superposition de deux réseaux de cercles ou de droites. Quand on projette les intersections d'un cône par une série de plans parallèles au plan de la base (a, à gauche), on obtient des cercles concentriques. Par ailleurs, les intersections d'un plan incliné par une série de plans perpendiculaires au plan de

projection (a, au centre) se projettent en une série de droites parallèles. On obtient des figures de moirés en superposant ces deux réseaux de projection (a, à droite). Selon l'inclinaison du plan par rapport au cône, on obtient les figures d'intersection d'un cône avec un plan : des paraboles (b), des ellipses (c) et des hyperboles (d).