

La Conjecture de Catalan

Les mathématiciens n'ont jamais été aussi près de la démonstration de cette conjecture.

En 1843, le mathématicien français Eugène Catalan (1814–1894) écrit à l'éditeur d'un journal de référence : « Je vous prie, Monsieur, de vouloir bien énoncer dans votre recueil, le théorème suivant, que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à le démontrer complètement ; d'autres seront peut-être plus heureux. Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent pas être des puissances exactes ; autrement dit : l'équation $x^m - y^n = 1$, dans laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admet qu'une seule solution. »

Cette équation, dite diophantienne, car les inconnues sont des nombres entiers positifs, est la *Conjecture de Catalan*. Depuis 150 ans, elle résiste aux assauts des mathématiciens, mais à chaque nouveau résultat l'espace des solutions, s'il en existe d'autres, se réduit. Le dernier résultat est celui du mathématicien américain Jon Grantham et de Maurice Mignotte, de l'Université de Strasbourg, qui ont montré que les exposants m et n ne peuvent être que des nombres premiers. Retraçons les étapes par lesquelles l'étau s'est resserré autour de la conjecture.

En 1850, V. Lebesgue a prouvé que l'équation n'a pas de solution quand, selon l'énoncé de Catalan, n est pair. Ce n'est qu'en 1964 que le mathématicien chinois Kochao a montré que c'est aussi le cas pour m pair (à l'exception de $m=2$ et $n=3$, car $x=3$ et $y=2$ donne la solution de Catalan). Ont ensuite été publiés deux théorèmes

qui ont servi de base aux travaux ultérieurs. En 1961, John Cassels, de l'Université de Cambridge, a prouvé que s'il existe des solutions à cette équation et que les exposants m et n sont premiers (par convention, les nombres premiers sont désignés par les lettres p et q , l'équation se réécrit alors $x^p - y^q = 1$), p divise y et q divise x . Puis, en 1976, Robert Tijdemann, de l'Université de Leyde, aux Pays-Bas a montré que l'équation $x^m - y^n = 1$ a un nombre fini de solutions. Ce dernier résultat découle des travaux d'Alan Baker, qui s'est attaché à borner les solutions de certaines classes d'équations diophantiennes. L'étape suivante est due à Preda Mihailescu, de l'Institut polytechnique de Zurich, qui a montré que si l'équation $x^p - y^q = 1$ (p et q sont des nombres premiers) admet une solution, p et q constituent une paire de Weiferich, c'est-à-dire que les divisions de $p^{(q-1)}$ par q^2 et de $q^{(p-1)}$ par p^2 ont toutes deux pour reste 1. Seuls six exemples de paires de Weiferich sont connus : 2 et 1 093 ; 3 et 1 006 003 ; 5 et 1 645 333 507 ; 83 et 4 871 ; 911 et 318 917 et enfin, 2 903 et 18 787. Toutefois, ces paires ne sont pas des solutions de l'équation de Catalan.

Aujourd'hui, les ordinateurs réduisent encore l'espace des solutions possibles de l'équation. Récemment, J. Grantham a démontré que p et q sont tous deux supérieurs à 3×10^8 (ce résultat explique que les paires de Weiferich ne sont pas des solutions), tandis que M. Mignotte a prouvé que m et n sont tous deux inférieurs à 8×10^{16} . À partir de ces résultats, associés à ceux de A. Baker, les mathématiciens ont montré que m et n sont des nombres premiers ; reste à découvrir les paires de Weiferich comprises entre ces bornes. Les coups de boutoir des mathématiciens font que la conjecture de Catalan se rapproche du statut de théorème.

Espèces d'éléphants !

Longtemps considérés comme une seule espèce, les éléphants d'Afrique en font deux.

C'est un lieu commun : il y a les éléphants d'Afrique (*Loxodonta*), grands, pourvus de grandes défenses, et les éléphants d'Asie (*Elephas*), plus petits, aux oreilles réduites et aux défenses plus courtes. Pourtant, à parcourir l'Afrique, les éléphants rencontrés semblent de deux types : ceux des savanes et ceux des forêts. Y aurait-il deux espèces ? L'équipe de Nicholas Georgiadis, du Centre de recherche Mpala, au Kenya, et de Alfred Roca, de l'Institut national contre le cancer, à Frederick, aux États-Unis, a montré que la génétique conforte cette hypothèse.

Les éléphants des savanes sont les plus grands mammifères terrestres. Ils mesurent jusqu'à quatre mètres au garrot, ont de grandes oreilles dont le lobe est pointu et des défenses volumineuses. Les éléphants des forêts sont des créatures timides qui ne quittent guère leur habitat. Ils atteignent seulement 2,4 mètres au garrot, sont plus légers, ont des défenses plus droites et plus fines, des lobes d'oreilles arrondis et un crâne différent. Un seul d'entre eux vit en captivité, au parc zoologique de Vincennes.

Toutefois, malgré ces différences morphologiques, la plupart des zoologues n'ont vu en ces éléphants qu'une seule espèce : *Loxodonta africana*. Parfois, ils étaient répartis en deux sous-espèces : *Loxodonta africana africana*, l'éléphant des savanes, et *Loxodonta africana cyclotis*, l'éléphant des forêts. Les deux populations sont interfécondes, ainsi que leurs descendants. La définition du concept d'espèce est fondée sur ce critère et les biologistes pensaient que des croisements entre ces deux populations avaient lieu aux frontières de leurs habitats respectifs.

Les analyses de N. Georgiadis infirment cette hypothèse. Il a prélevé des échantillons de peau d'environ 200 éléphants, dans 21 populations réparties sur l'ensemble du continent. L'objectif premier de ces prélèvements était la constitution d'un fichier de signatures génétiques pour suivre l'ivoire sur les marchés mondiaux. Toutefois, à partir de ces échantillons, les biologistes ont séquencé, pour chaque animal, quatre gènes, soit 1 732 bases. Les résultats ont révélé que l'ensemble des éléphants se répartit en deux types : 17 populations sont composées d'éléphants des savanes, trois d'éléphants des forêts. Une seule population témoignait d'une mixité entre les deux types. Toutefois, selon les biologistes, ce croisement exceptionnel s'est déroulé il y a plusieurs générations.

Les analyses génétiques montrent que les différences entre les éléphants des savanes et ceux des forêts correspondent à 58 pour cent de celles qui existent entre un éléphant d'Afrique et un éléphant d'Asie. Cette différence équivaut à celle qui distingue les lions des tigres, et l'on peut en déduire qu'il y a bien deux espèces : *Loxodonta africana* et *Loxodonta cyclotis*. Ces résultats jettent un éclairage nouveau sur la protection des éléphants. En effet, seule une espèce (*Loxodonta africana*) est inscrite sur la liste des espèces menacées, et il est urgent d'y inscrire les éléphants des forêts dont la population est encore plus restreinte que celle des éléphants des savanes. Les éléphants sont plus en danger qu'on ne le pensait.



Loxodonta africana africana ou *Loxodonta africana cyclotis* ?

Nouvel observatoire gamma

Un nouvel observatoire installé en Inde permet aux astronomes d'observer le rayonnement gamma du ciel à partir du sol.

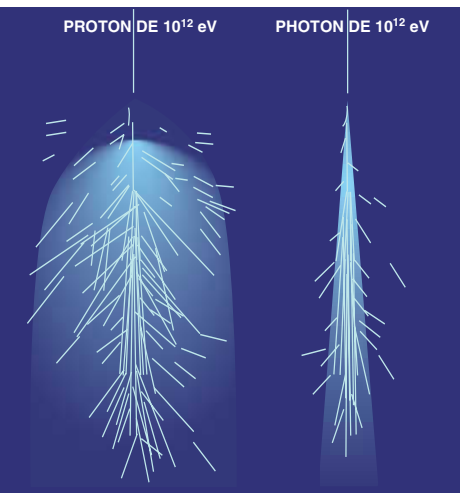
Les phénomènes les plus violents de l'Univers, notamment les supernovae, libèrent des rayons gamma. Comme ce type de rayonnement est absorbé par l'atmosphère terrestre, les astronomes les observent habituellement à l'aide de détecteurs embarqués à bord de satellites. Toutefois, l'impact d'un photon gamma sur les atomes de l'air produit une gerbe lumineuse qu'il est possible d'observer du sol, et Narayana Bhat et ses collègues de l'Institut de recherche fondamentale de Mumbai, en Inde, ont construit un observatoire terrestre des sources gamma.

Des particules de haute énergie engendrent dans l'atmosphère une lumière, bleue et ultraviolette, nommée lumière Cerenkov. Les atomes de l'air percutés par de telles particules, sont excités et émettent une lumière caractéristique tant par sa longueur d'onde que par sa répartition spatiale conique. Malheureusement, les photons gamma ne sont pas les seules particules énergétiques entrant dans l'atmosphère. De grandes quantités de protons – les rayons cosmiques – provenant de toutes les directions du ciel produisent en permanence des éclairs similaires. Pour détecter et localiser les sources astrophysiques de rayons gamma du sol, il importe de distinguer l'impact d'un proton et celui d'un photon.

En entrant dans l'atmosphère, un photon gamma est diffusé par les atomes de l'air au cours d'une série de chocs où naissent des paires d'électrons et d'antiélectrons très rapides. Ces particules émettent à leur tour de la lumière Cerenkov. Ainsi, l'arrivée d'un photon gamma est accompagnée d'une cascade approximativement conique de traînées lumineuses, que les astronomes nomment une gerbe. Les protons entrant dans l'atmosphère créent aussi une gerbe ; toutefois son aspect est différent, car les protons ne sont pas diffusés par les atomes eux-mêmes, mais par leur noyau, environ 100 000 fois plus petits que les atomes. Les gerbes protoniques sont plus pénétrantes que les gerbes photoniques. Enfin, les interactions entre protons et noyaux produisent des particules massives (comme des mésons, 300 fois plus lourds que les électrons), qui forment des gerbes plus étalées.

N. Bhat et ses collègues ont installé un réseau de 25 télescopes, dont la surface collectrice représente 133 mètres carrés répartis sur une zone de 80 mètres sur 100. Un système électronique distingue les gerbes photoniques et des gerbes protoniques. Le dispositif, PACT, vient d'être testé sur la nébuleuse du Crabe, une source de rayons gamma, qu'il a suivie à trois minutes d'angle près. L'éclat estimé correspond aux mesures effectuées lors de précédentes expériences menées aux États-Unis et en France. Ainsi, l'astronomie gamma de précision au sol s'est enrichie d'un nouvel observatoire.

Patrick BURY



Gerbe produite dans l'atmosphère par un proton (à gauche) et par un photon (à droite).

La vision des couleurs chez les primates

La faculté de distinguer le vert du rouge, absente chez les daltoniens, serait née chez les singes de la nécessité de choisir les feuilles les plus comestibles.

Dans la forêt de Kibale, en Ouganda, un chimpanzé choisit les feuilles d'arbres qui lui fourniront les éléments nutritifs utiles en cette saison, où les fruits sont rares. Il distingue avec précision les feuilles rouges, les plus jeunes. Il les repère grâce à trois pigments sensibles à des longueurs d'onde situées dans le vert, le bleu et le rouge. Nathaniel Dominy et Peter Lucas, de l'Université de Hong Kong, ont mis en évidence un lien entre le mode d'alimentation de ces singes et leur vision des couleurs.

La capacité à distinguer le vert du rouge caractérise quelques espèces de primates, dont l'homme, le chimpanzé, le colobe rouge et le colobe noir et blanc, le cercopithèque à queue rouge d'Afrique, et l'alouate d'Amérique. Cette capacité résulte de la vision de trois couleurs, qui repose sur trois types de cellules de la rétine, les unes sensibles au rouge, les autres au vert et les dernières au bleu. Cette sensibilité à différentes longueurs d'onde est assurée par des pigments. Beaucoup de singes n'en ont que deux (le bleu et le vert). Quel avantage procure un pigment rouge supplémentaire ? Cet avantage semble être d'origine alimentaire : le pigment rouge assure la vision des feuillages rouges.

Les forêts tropicales d'Afrique comptent jusqu'à 60 pour cent de feuillage de couleur rouge. Ces feuilles sont souvent de jeunes pousses riches en protéines, encore tendres, par conséquent plus faciles à digérer. Or, les singes voyant en deux couleurs (vert et bleu), ne distinguent pas les feuilles rouges des feuilles vertes. Seuls les chimpanzés, les colobes noirs et blancs, les colobes rouges et les cercopithèques à queue rouge, ont cette faculté. Lorsque les fruits sont rares, ils se nourrissent essentiellement de feuilles, et les rouges sont plus nourrissantes : les singes dotés de cette faculté ont sans doute acquis un avantage évolutif.

En Amérique, l'unique primate qui voit en trois couleurs, le singe hurleur, mange aussi des feuilles. Il utilise cette faculté pour dénicher les feuilles rouges plus rares qu'en Afrique. Cet atout lui confère un avantage notable, car il est beaucoup plus paresseux que les autres singes de son biotope. Les singes-araignées, qui mangent les mêmes fruits, le précèdent souvent sur les lieux de récolte, aussi doit-il se rabattre sur les feuilles. Ainsi, la vision trichromatique avantagerait tant les singes d'Afrique que celui d'Amérique, mangeurs de feuilles. Aurions-nous acquis notre vision des couleurs parce qu'un de nos lointains ancêtres amateur de feuilles rouges y a trouvé un avantage évolutif ?

Sébastien BOHLER



Wisconsin Regional Primate Research Center