



Bachelier, précurseur...

IVAR EKELAND

... et incompris. Sa «théorie de la spéculation» ne fut pleinement reconnue qu'après un siècle!

L'université de Besançon va publier un livre consacré à un savant longtemps méconnu, Louis Bachelier. Celui-ci soutint, dans cette même université, le 29 mars 1900, une thèse intitulée «Théorie de la spéculation» qui est l'acte de naissance de la théorie financière moderne, et sans doute le premier exemple d'utilisation du mouvement brownien à la modélisation économique.

Nul ne sait pourquoi Bachelier choisit ce sujet peu académique, ni comment il connaissait les marchés financiers. Ses parents étant morts quand il avait 19 ans, il dut s'occuper de l'entreprise familiale, un négoce de vins au Havre, et ne put commencer ses études de mathématiques qu'à 22 ans. Pour sa thèse, il se propose d'étudier «La loi de probabilité des variations de cours qu'admet le marché à un instant donné». Plus précisément, il attaque deux problèmes : la probabilité qu'un cours donné de la Bourse soit atteint ou dépassé à une date donnée, et la probabilité qu'un cours donné soit atteint avant une date donnée. Est-il problème plus important ? Dans le langage financier actuel, Bachelier cherche les probabilités d'exercice d'une option européenne et d'une option américaine.

La thèse de Bachelier est construite autour de trois idées : les cours sont cotés en continu, leur évolution est aléatoire, et la moyenne des gains est nulle (à condition que le taux d'intérêt soit nul, ce que nous supposons désormais). Imaginons par exemple que l'on relève les cours à intervalles réguliers de longueur h , $t=0, h, 2h, 3h, \dots$ et que chaque cours soit déduit du cours précédent en tirant à pile ou face : pour pile, le cours monte de la quantité c , pour face, il baisse de c .

Le processus ainsi obtenu satisfait toutes les hypothèses de Bachelier.

Mais les cours sont cotés en continu, et quand Bachelier écrit, on ne dispose pas de modèle mathématique cohérent pour

décrire des processus aléatoires en temps continu. En cette fin du XIX^e siècle, le hasard ne se mesure qu'en des temps discrets, et ce sera l'œuvre du XX^e siècle que de passer au continu. Longtemps avant tout le monde, Bachelier comprend l'intérêt du problème, pour les applications et pour les mathématiques elles-mêmes : «Si la spéculation n'existait pas, il faudrait l'imaginer», dit-il.

En passant à la limite, c'est-à-dire en imaginant ce qui se passe quand l'intervalle h entre deux relèvements devient de plus en plus petit, Bachelier montre que la variation de cours entre deux instants donnés t et T suit une loi de Gauss, dont la moyenne est nulle et la variance proportionnelle à la longueur de l'intervalle les séparant, soit $(T - t)$. Ce faisant, il retrouve une loi expérimentale découverte en 1863 par Jules Regnault, auteur d'un ouvrage intitulé *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*, et il démontre une des propriétés fondamentales du mouvement brownien, trente ans avant que Wiener n'en fasse la théorie complète. Hélas, Bachelier prend quelques libertés avec la sacro-sainte rigueur mathématique, ce qui lui vaut l'opprobre des universitaires de l'époque qui ratiocinaient sur des erreurs minimales au lieu de voir la percée théorique.

Les contributions mathématiques de Bachelier ne s'arrêtent pas là, puisqu'il découvre également les liens très profonds du mouvement brownien avec les solutions d'une équation issue de la physique mathématique, régissant la diffusion de la chaleur, et l'équation correspondante reste un outil fondamental de la finance : bel exemple de l'universalité des modèles mathématiques.

Malheureusement l'histoire de Bachelier est triste. Comme il n'était rien (ni agrégé, ni normalien, ni polytechnicien), qu'il avait tardé à faire ses études, et qu'il avait écrit des livres de vulgarisation, il n'obtint jamais aucune considération du milieu académique, et jusqu'à

55 ans il vécut en situation précaire, comme boursier de recherche ou enseignant non titulaire. Poincaré, qui faisait partie de son jury de thèse, avait compris ses idées et en avait relevé l'intérêt, mais il était à peu près le seul. Le grand spécialiste français du mouvement brownien, Paul Lévy, ne consentit à le lire que quand il découvrit que Kolmogorov le citait. Bachelier ne fut professeur qu'à 57 ans, et ce fut l'université de Besançon qui s'honora de l'accueillir. Il prit sa retraite en 1937 et mourut en 1946.

La revanche définitive devait encore attendre quelques années. En 1973, deux professeurs de finance américains, Fischer Black et Myron Scholes, construisaient une théorie qui utilisait le modèle de Bachelier, avec tous les acquis obtenus entretemps sur processus de diffusion, et qui allait avoir un immense succès. La formule qui porte leur nom, et qui est utilisée aujourd'hui en finance pour évaluer le prix de certains produits, est une conséquence directe de l'équation de la chaleur.

Aujourd'hui on relit la thèse de Bachelier pour s'émerveiller *a posteriori* de tout ce qu'il avait compris. Il s'était même donné la peine de confronter ses résultats avec les observations, ce qui fait de lui également un des précurseurs de l'économétrie : il déduit de sa théorie que «la valeur de la prime simple doit être proportionnelle à la racine carrée du temps», la prime simple étant ce que nous appelons aujourd'hui le prix d'une option à la monnaie, et le coefficient de proportionnalité, la volatilité du cours, puis il va chercher ce que vaut cette prime pour diverses échéances à la bourse de Paris, et il constate la validité de son modèle. On est surpris que les contemporains ne s'en soient pas étonnés, et la mention «honorable» qu'obtint la thèse de Bachelier reste choquante.

À cet ennui poli, mais profond, globalement exprimé par la communauté mathématique de l'époque, je préfère 100 fois l'enthousiasme de Regnault découvrant que les écarts de cours sont proportionnels à la racine carrée du temps : «Est-il exemple plus frappant d'un accord entre la théorie et l'expérience !»

