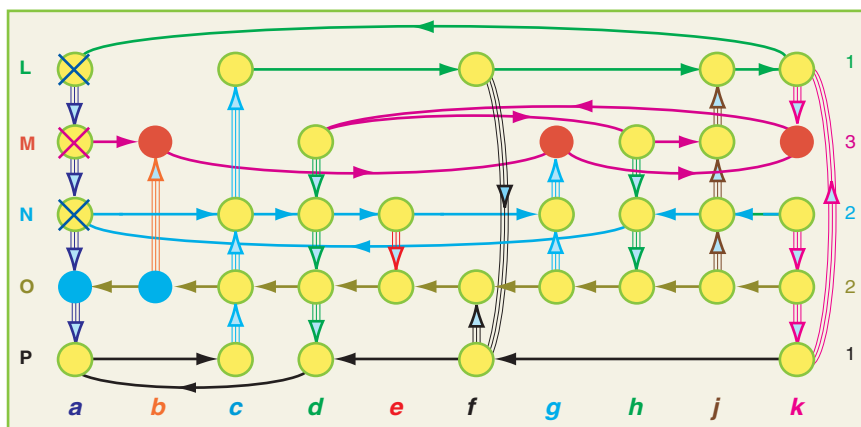




3. LES SOMMETS INUTILES : les sommets rouges (M, k) , (M, g) et (M, b) sont les meilleurs de leur colonne, et la capacité de la ligne M est de trois postes. En conséquence, le sommet (M, a) , moins bien classé par Montpellier, est inutile et peut être éliminé (croix rouge). Les sommets (O, a) et (O, b) en bleu sont les meilleurs pour remplir les deux postes d'Orléans : donc (L, a) et (N, a) , moins bien classés par Allègre, sont inutiles (croix bleues) et supprimés.

pellier, de Chevènement et Faure à Nancy, de Fontanet et Haby à Orléans, et de Lang à Paris, revient à choisir l'ensemble des sommets : (L, a) , (M, b) , (M, d) , (M, g) , (N, c) , (N, e) , (O, f) , (O, h) , (P, k) .

Tout ensemble de sommets parmi ceux du graphe ayant au plus un sommet par colonne et dont le nombre de sommets d'une ligne ne dépasse pas sa capacité représente une affectation possible (comme la verte). Désormais, l'analyse du problème se fera dans l'esprit des graphes.

Affectations méritoires

En général, un problème peut avoir un nombre exponentiel d'affectations. Sont-elles toutes raisonnables ?

L'affectation verte de la figure 2 est certes possible, mais à regarder de plus près... certaines anomalies apparaissent. Le sommet (M, j) n'est pas dans l'affectation verte – en fait, Jospin n'est affecté à aucune université –, mais ce sommet suit, dans sa ligne, au moins un sommet vert (M, g) : ainsi Jospin est classé devant Guichard par Montpellier. Pourquoi alors ne pas affecter Jospin à Montpellier plutôt que Guichard ? Manifestement, l'affectation verte ne reconnaît pas les mérites de Jospin. Elle ne distingue pas plus ceux de Lang. Le sommet (M, k) suit, dans sa ligne, au moins un sommet de l'affectation verte et (M, k) suit aussi, dans sa colonne, le sommet vert : Montpellier (M) préfère Lang (k) à au moins un des candidats verts $(b$ ou $g)$, et Lang (k) préfère Montpellier à son affectation verte (P) . L'affectation verte est manifestement inadmissible.

Le principe de mérite à respecter est clair : si un candidat peut être affecté à un emploi de l'université E , mais ne l'est pas, alors soit il est affecté à un emploi qu'il préfère, soit les emplois de E sont tous affectés à des candidats mieux classés que lui par E . Autrement, ce candidat réclamerait un poste à l'université E à la place (si nécessaire) d'un autre candidat moins bien classé. Dans les termes du modèle, une affectation μ est méritoire quand elle répond aux exigences logiques formulées dans la légende de la figure 2.

Il n'est nullement évident qu'il soit possible de trouver une affectation méritoire pour n'importe quel problème, mais quelques observations simples ouvrent la voie à une approche qui en fournira toujours au moins une.

Revenons au problème et regardons la figure 3. Prenons d'abord le point de vue de Montpellier. Cette université (M) a trois postes à pourvoir. Elle voit qu'elle est le premier choix des trois candidats Bayrou (b) , Guichard (g) et Lang (k) (sommets rouges). Donc, M sait qu'elle ne sera jamais obligée de nommer un concurrent classé en dessous de ces trois, en l'occurrence, Allègre, et il n'y a aucune raison de considérer cette possibilité. Dans le graphe, le sommet (M, a) est suivi dans sa ligne par trois sommets qui sont chacun le meilleur de sa colonne, où 3 est la capacité de la ligne M et peut, en conséquence, être éliminé (suppression indiquée par la croix rouge de la figure 3) : c'est un sommet inutile pour une université.

Un sommet peut aussi être inutile du point de vue d'un postulant. Allègre (a) voit qu'il est classé parmi

les deux meilleurs par Orléans (en bleu sur la figure 3), où deux postes sont disponibles, donc il est sûr d'être nommé à Orléans sinon mieux et il peut oublier ses candidatures à Lyon et à Nancy (ainsi qu'à Montpellier, déjà éliminé). (N, a) et (L, a) sont inutiles pour un candidat (indiqués par les croix bleues), ici le candidat Allègre : chacun de ces sommets est suivi dans sa colonne par un sommet parmi les q meilleurs de sa ligne, où q est la capacité de la ligne.

Ainsi, en identifiant et en supprimant des sommets inutiles du graphe, on obtient un graphe plus petit qui représente strictement le même problème : une affectation est méritoire pour un des graphes si et seulement si elle est méritoire pour l'autre. Un moyen d'obtenir des affectations méritoires – y compris celles choisies par les ministères français et turc – est de systématiser cette simplification.

Algorithme graphique

Calculer dans ce système mathématique revient donc à identifier des sommets inutiles et à les éliminer.

L'opération est facile. Afin de trouver les sommets inutiles pour les universités, coloriez en rouge le meilleur sommet de chaque colonne (voir la figure 4a), c'est-à-dire, choisissez la solution dite candidats-gloutonne, où à chaque candidat est accordé son meilleur choix. Dans une ligne ayant au moins sa capacité q de sommets rouges, tous les sommets qui précèdent les q meilleurs sommets rouges sont inutiles. Ainsi, dans notre exemple, dix sommets sont identifiés comme inutiles pour les universités (désignés par des croix rouges sur la figure 4b) : leur élimination donne le graphe de la figure 4c. Dans ce graphe, la solution candidats-gloutonne (en rouge) révèle trois sommets inutiles pour les universités (voir la figure 4d), ce qui mène au graphe de la figure 4e. Mais ici, il n'y a pas de sommet inutile pour une université, les sommets rouges – la solution candidats-gloutonne – constituent une affectation méritoire, car cette solution satisfait les exigences définissant les affectations méritoires : chaque sommet est, soit rouge, soit suivi par un sommet rouge dans sa colonne.

Cet algorithme démontre qu'il y aura toujours, pour tout problème, une affectation méritoire, car de deux choses l'une : soit au moins un som-

met inutile pour une université est éliminé, soit aucun n'est inutile pour les universités et, dans ce cas, les rouges constituent une affectation méritoire. La première possibilité ne peut pas se répéter éternellement, donc la seconde doit se produire.

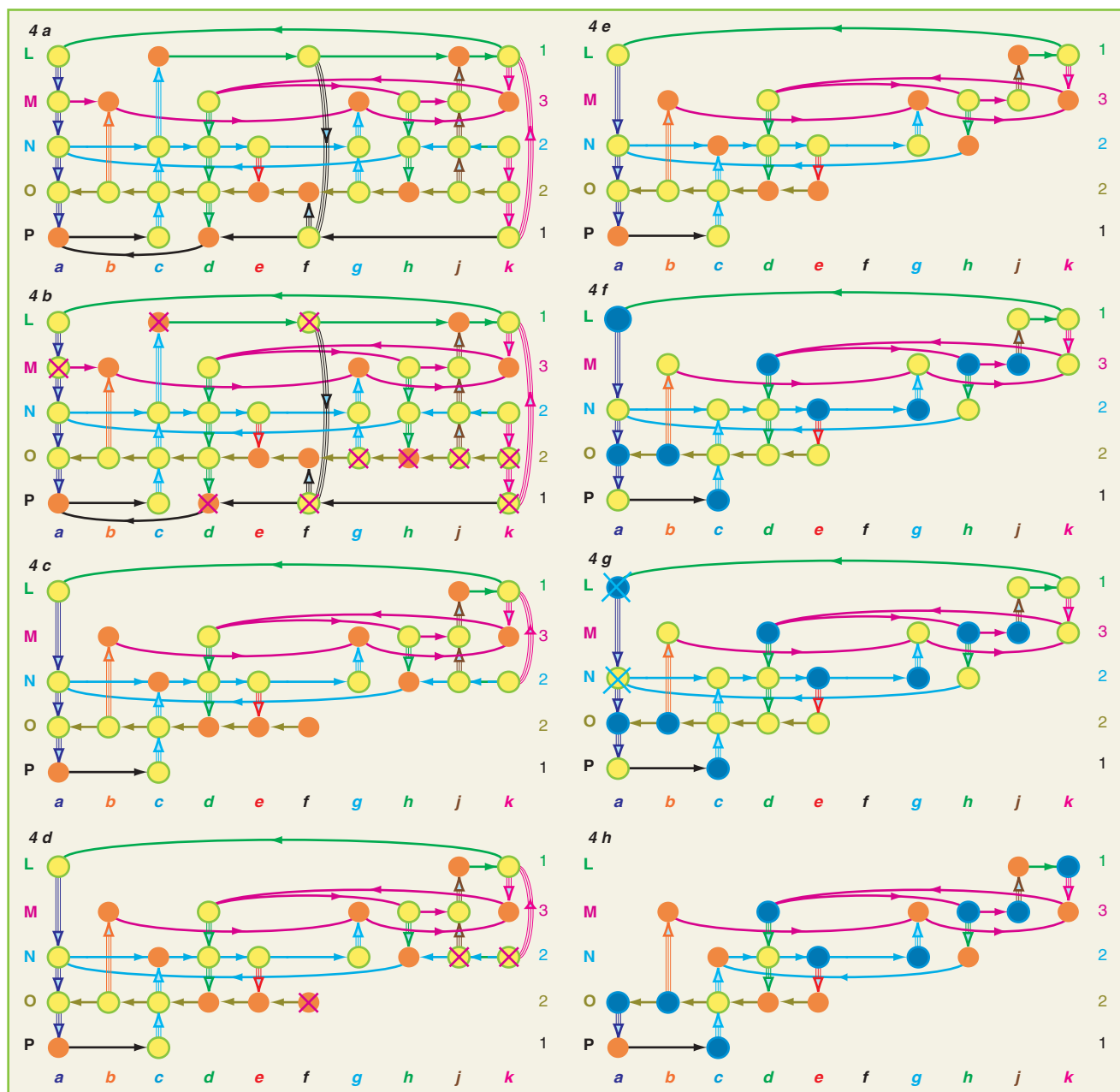
Examinons maintenant les sommets inutiles pour les candidats (on aurait pu commencer par eux). La solution candidats-gloutonne, coloriée en rouge, avait été utilisée pour identifier les som-

met inutiles pour les universités. Ainsi, afin de trouver les sommets inutiles pour les candidats, choisissez la solution *universités-gloutonne* : coloriez en bleu les q meilleurs sommets de lignes de capacité q , (voir la figure 4f) (dans cette solution, à chaque université est accordé son idéal). Dans une colonne ayant au moins un sommet bleu, tous les sommets qui le précèdent (dans le classement du candidat de cette colonne) sont inutiles. En l'occurrence, il y en a deux (*les croix*

bleues de la figure 4g) : les éliminer donne le graphe de la figure 4h et, dans ce graphe, il ne reste aucun sommet inutile.

Affectations méritoires favorites... pour qui ?

La solution candidats-gloutonne en rouge sur la figure 4h est une affectation méritoire, et donc l'affectation méritoire *favorite des candidats*, dénommée $\mu(C)$. De même, la solution en bleu



4. L'ALGORITHME GRAPHIQUE DE RÉSOLUTION. On commence (4a) par affecter, à chaque candidat, l'université qu'il préfère (en rouge) ; puis (4b) on identifie les sommets inutiles pour les universités (les croix rouges) et on les supprime (4c). La même démarche s'applique maintenant au graphe (4c) : chaque candidat est affecté à son premier choix (en rouge), puis (4d) les sommets inutiles pour les universités sont identifiés (croix rouges) et on les supprime (4e). On réitère pour le graphe (4e) : les candidats sont tous affectés à leur premier choix (en rouge) ; cette fois, il n'y a pas de som-

met inutile pour les universités et les sommets en rouge constituent une affectation méritoire. Toutefois, il peut exister des sommets inutiles pour les candidats. On affecte (4f) à chaque université de capacité q ses q candidats préférés (en bleu), puis (4g) on identifie les sommets inutiles pour les candidats (les croix bleues) et on les supprime (4h). Et on continue ainsi. Le graphe (4h) ne contient aucun sommet inutile : les sommets en bleu indiquent $\mu(U)$, l'affectation méritoire favorite des universités, et les sommets en rouge $\mu(C)$, l'affectation méritoire favorite des candidats.