

est l'affectation méritoire *favorite des universités*, appelée $\mu(U)$. Elles sont visiblement les favorites : $\mu(C)$ (la rouge) donne à chaque candidat son premier choix dans le graphe de la figure 4h, donc son meilleur choix possible puisque seuls ont été éliminés des sommets inutiles (autrement dit, on s'est simplement débarrassé du brouillage du système). Et, bien sûr, $\mu(U)$ (la bleue) donne également à chaque université son meilleur choix possible. Notons que le même graphe final serait obtenu indépendamment de l'ordre d'élimination des sommets inutiles.

Toutefois, ces affectations sont fâcheusement différentes : la figure 4h montre indubitablement que la favorite des candidats $\mu(C)$, la rouge, est la pire pour les universités, et que la favorite des universités $\mu(U)$, la bleue, est la pire pour les candidats.

En général, il peut y avoir beaucoup d'affectations méritoires : un problème avec 9 postes à pourvoir pourrait avoir 55 affectations méritoires..., et avec 18 postes à pourvoir, 4 181 affectations méritoires. En l'occurrence, dans notre problème, il y en a exactement 8 (voir la figure 5). En bas de la figure est l'affectation méritoire favorite des universités, $\mu(U)$, en haut, l'affectation méritoire favorite des candidats, $\mu(C)$, et entre les deux, toutes les autres affectations méritoires. Les flèches vers le haut montrent que les affectations s'améliorent collectivement pour les candidats : en allant de l'une à l'autre, chaque candidat est affecté soit au même poste, soit à un meilleur (de son point de vue). Ainsi, en allant de $\mu(6)$ à $\mu(3)$, Allègre va de son deuxième choix effectif – Orléans – à son premier – Paris –, et Chevènement de son troisième – Paris – à son deuxième – Orléans.

Cependant, quand une affectation méritoire est meilleure pour un candi-

dat, elle est pire pour l'université concernée : de $\mu(6)$ à $\mu(3)$, Orléans et Paris sont moins contentes. Par ailleurs, si deux affectations méritoires ne sont pas liées par une suite de flèches sur la figure 5, l'une n'est pas collectivement meilleure que l'autre pour les candidats ; $\mu(5)$ est meilleure que $\mu(4)$ pour certains candidats, pire pour certains, et la même pour d'autres.

Les procédures des ministères français et turc choisissent toutes les deux une affectation méritoire : précisément, l'affectation favorite des universités, $\mu(U)$. Pourquoi ? Par erreur ? Par rapport à quel objectif ? Mystère. Ceci est peut-être tout simplement dû aux réflexes innés de représentants d'État centralisateurs.

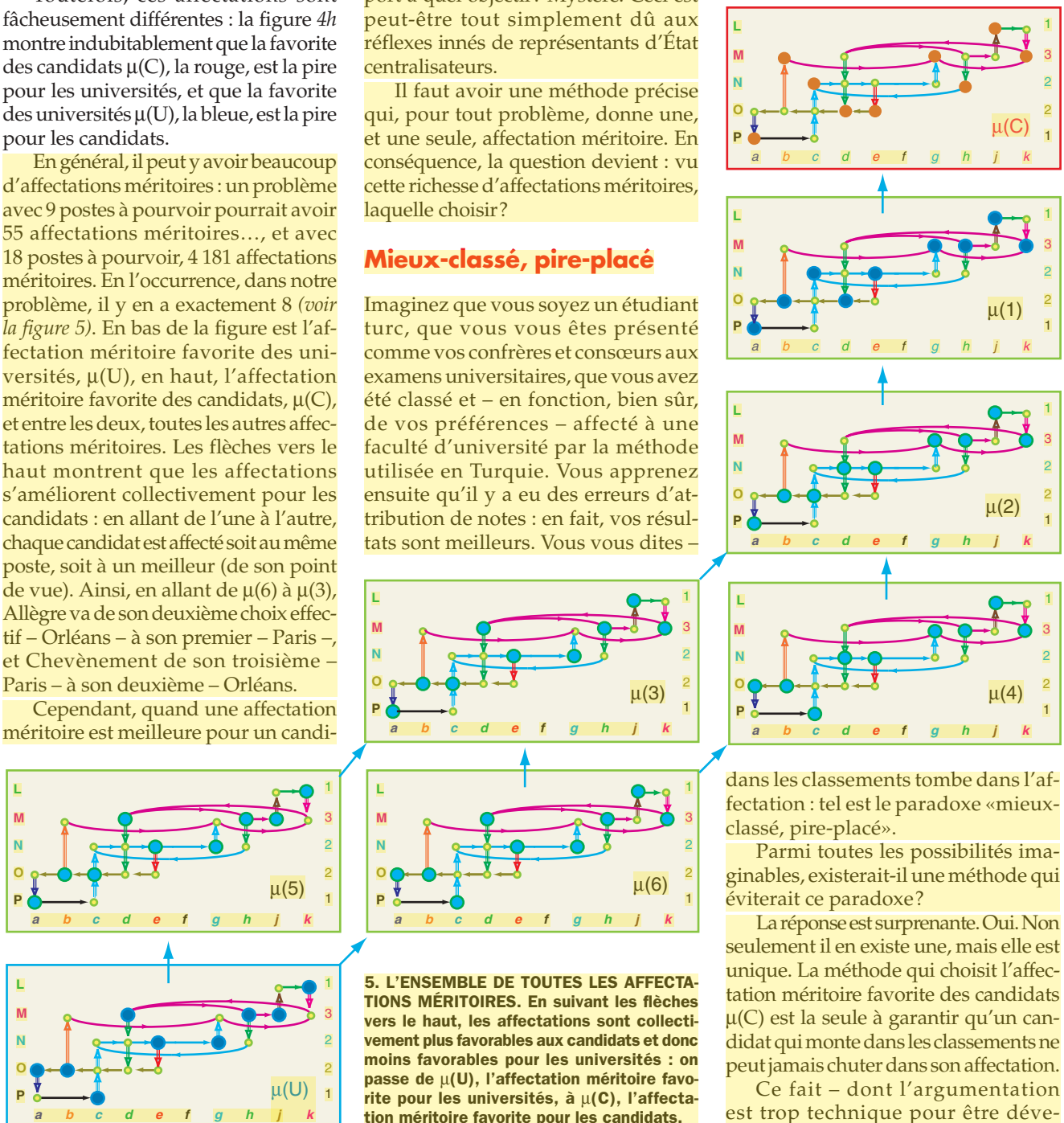
Il faut avoir une méthode précise qui, pour tout problème, donne une, et une seule, affectation méritoire. En conséquence, la question devient : vu cette richesse d'affectations méritoires, laquelle choisir ?

Mieux-classé, pire-placé

Imaginez que vous soyez un étudiant turc, que vous vous êtes présenté comme vos confrères et consœurs aux examens universitaires, que vous avez été classé et – en fonction, bien sûr, de vos préférences – affecté à une faculté d'université par la méthode utilisée en Turquie. Vous apprenez ensuite qu'il y a eu des erreurs d'attribution de notes : en fait, vos résultats sont meilleurs. Vous vous dites –

tant mieux ! – je pourrai aspirer à une meilleure affectation.

Peut-être... mais ce n'est pas du tout sûr, car le ministère de l'Éducation nationale turc utilise la méthode qui choisit l'affectation favorite des universités, $\mu(U)$. La figure 6 décrit une telle situation. À gauche, le candidat *a* est classé dernier par l'université *L* ; à droite, le problème est identique, sauf que le candidat *a* est maintenant classé premier par *L*. Résultat (en bleu) : à gauche, *a* est affecté à son premier choix ; à droite, il est affecté à son dernier choix ! Un candidat qui monte



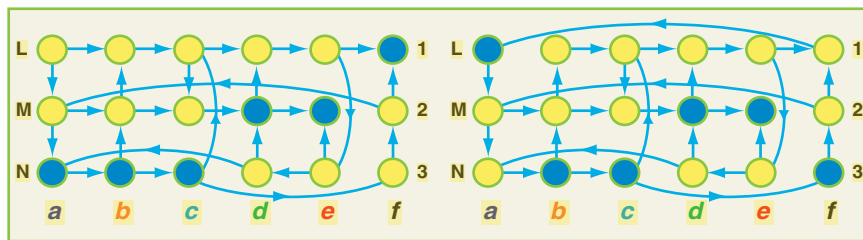
5. L'ENSEMBLE DE TOUTES LES AFFECTATIONS MÉRITOIRES. En suivant les flèches vers le haut, les affectations sont collectivement plus favorables aux candidats et donc moins favorables pour les universités : on passe de $\mu(U)$, l'affectation méritoire favorite pour les universités, à $\mu(C)$, l'affectation méritoire favorite pour les candidats.

dans les classements tombe dans l'affectation : tel est le paradoxe «mieux-classé, pire-placé».

Parmi toutes les possibilités imaginables, existerait-il une méthode qui éviterait ce paradoxe ?

La réponse est surprenante. Oui. Non seulement il en existe une, mais elle est unique. La méthode qui choisit l'affectation méritoire favorite des candidats $\mu(C)$ est la seule à garantir qu'un candidat qui monte dans les classements ne peut jamais chuter dans son affectation.

Ce fait – dont l'argumentation est trop technique pour être déve-



6. LE PARADOXE MIEUX-CLASSÉ, PIRE-PLACÉ. À gauche, le candidat *a* est classé dernier par l'université *L* ; dans ce cas, $\mu(U)$, en bleu, l'affectation favorite des universités, lui donne son premier choix, *N*. À droite, les conditions sont identiques, à la différence près que le candidat *a* est classé premier par l'université *L*. Résultat : l'affectation $\mu(U)$, en bleu, lui accorde son dernier choix !

loppée ici – devrait suffire à convaincre les autorités turques de changer de méthode. La même déduction s'applique au problème de recrutement en France : il n'est pas acceptable qu'un postulant qui monte dans les classements d'une ou de plusieurs universités reçoive en conséquence un poste moins désiré. De plus, un autre phénomène désagréable, et tout autant choquant, apparaît dans le cas français.

Tricheries incitées

La procédure en France est unique : elle demande à tout postulant de classer ses préférences après qu'il a pris connaissance de ses classements par les universités, et puis l'invite à les modifier, s'il le souhaite, jusqu'à la date fatidique de clôture.

Imaginez ce qui pourrait se passer dans la campagne de recrutement 2002 en Sciences politiques. Une fois les classements des universités annoncés, trois des candidats se concertent, Allègre, Jospin et Lang (voir la figure 1). Ils s'informent mutuellement de leur classement, donc ils savent que le classement de Lyon est dans l'ordre 1 Allègre, 2 Lang, 3 Jospin, et que Montpellier classe Jospin 1 et Lang 4. Lyon n'intéresse nullement Allègre (il est certain d'avoir au moins Orléans), donc le poste de Lyon sera pour Lang et un des trois postes de Montpellier sera pour Jospin... sans tricherie !

Toutefois, si Lang ment et tout simplement ne classe pas dans ses préférences Lyon, alors, par la méthode $\mu(U)$ utilisée, Jospin serait sûr d'être affecté à son premier choix, Lyon, et Lang – quatrième sur la liste de Montpellier dont le premier, Allègre, est affecté ailleurs – obtient son premier choix, Montpellier. Étonnant ? Pas vraiment dans un marché où peu de postes sont brigüés par des

candidats dont beaucoup se connaissent. Le fait est que de telles manipulations entrent en jeu actuellement. Sont-elles évitables ?

La réponse est, là aussi, surprenante : parmi toutes les méthodes concevables, il en est une qui évite toute tricherie, et seulement une. La méthode qui choisit l'affectation méritoire favorite des candidats $\mu(C)$ est la seule qui garantisse qu'aucun candidat ne peut profiter de l'annonce de ses préférences autres que vraies.

La solution existe...

L'analyse mathématique tranche clairement. Une seule méthode choisit une affectation méritoire et évite dans toutes circonstances le paradoxe « mieux-classé, pire-placé » : la favorite des candidats, $\mu(C)$. Et si une méthode doit sélectionner une affectation méritoire qui écarte à coup sûr toute tricherie payante des candidats, alors seulement la même, $\mu(C)$, est capable de répondre.

L'analyse des conséquences possibles du choix d'une seule affectation méritoire a permis d'identifier ce qui devrait effectivement être optimisé. Mais après tout, n'est-il pas moral de prendre le point de vue des individus – les postulants – plutôt que celui des institutions – les universités ? Il serait ainsi possible d'afficher ce qui est optimisé, et pourquoi.

Il est évident que, dans les situations turque et française, il faudrait changer de procédure. Est-il possible de le faire en pratique ?

... mais comment l'appliquer en Turquie et en France ?

Remplacer $\mu(U)$ par $\mu(C)$ en Turquie serait facile : seul le choix de solution change, rien d'autre.

Bien sûr, il est actuellement impossible pour les étudiants turcs d'avoir les informations nécessaires afin de tricher

avec efficacité! Mais changer de méthode permettrait d'assurer à tout candidat qu'exprimer ses préférences franchement, sans ambages, est sa stratégie optimale. Aujourd'hui, les candidats agissent autrement – leurs stratégies sont fondées sur les oui-dire des années passées –, entraînant ainsi des effets non désirés (y compris un comportement d'autocensure néfaste).

Il semblerait que remplacer $\mu(U)$ serait aussi facile en France : il n'en est rien! De plus, la réalité est déconcertante : des facteurs autres que des mathématiques pures sont mêlés. Trop souvent, les préférences émises par les universités ne sont pas fondées sur les mérites des divers postulants, mais sont plutôt le résultat de discussions avec d'autres universités préparant leurs propres classements, et de négociations «confidentielles» avec des candidats – par exemple, du genre : «Si l'on vous classe premier, allez-vous nous classer premier?» Cela est évidemment très regrettable. Néanmoins, une fois les classements des universités soumis, les dés sont jetés : le problème mathématique est posé. Bien sûr, parmi les candidats, certains peuvent se sentir tenus d'obéir aux pressions des universités, mais pas tous : d'où l'invitation à la tricherie. La méthode importe.

Aussi ai-je essayé de faire état, dans une lettre adressée au Directeur de la Direction des personnels enseignants (DPE) du ministère il y a plus d'un an, des perversités de la procédure actuelle. Réponse de la DPE :

«J'ai l'impression que vous n'avez pas pris connaissance de l'intégralité de la procédure... La dernière opération est l'application d'un algorithme qui optimise la distribution des affectations selon les vœux des candidats tout en préservant les droits que leur confère leur rang de classement. Cette procédure a été voulue par le ministre et largement concertée à très haut niveau avec les partenaires, dont notamment le Conseil national des Universités...»

J'ai alors demandé «optimise quoi précisément?» (ajoutant, comme encouragement, «j'aurais pensé que l'objectif du ministère serait de trouver la meilleure procédure possible dans l'état des connaissances scientifiques actuelles»). Nouvelle réponse :

«... Cet algorithme est appliqué depuis 1992 sous le regard extrêmement attentif, vigilant et critique de la communauté universitaire et des 50 000 (environ) qualifiés, candidats poten-

tiels, dont de nombreux scientifiques. S'il était contestable ou s'il n'était pas optimal par rapport à l'objectif, cela se saurait, sans aucun doute...»

Dans un dernier échange, le Directeur lui-même m'a assuré par téléphone que la procédure n'était pas exclusivement de nature mathématique. Mais la promesse de m'envoyer les documents pertinents semble avoir été oubliée... *Sic transit gloria mundi.*

L'algorithme utilisé est contestable. Certes, tout est optimal par rapport à un objectif non dit, mais le calcul actuel donne une affectation qui n'est certainement pas optimale pour les candidats : au contraire, elle est la pire possible pour les candidats!

En fin de compte, si le ministère refuse tout changement, le remède n'est pas compliqué. Chaque candidat connaît ses classements individuels et, bien sûr, ses préférences, donc les candidats peuvent établir ensemble un fichier de toutes les informations pertinentes. Il suffit alors que quelques jeunes mathématiciens organisent la collecte des listes préférentielles des universités et des candidats, qu'ils calculent l'affectation méritoire favorite des candidats $\mu(C)$ et qu'ils disent à chaque candidat comment il doit exprimer ses préférences – le plus facile pour le candidat étant d'inscrire seulement l'université à laquelle il est affecté par $\mu(C)$. Un tel système hors-concours assurerait à chaque candidat son meilleur choix possible des affectations méritoires.

Une réforme de la procédure ministérielle ne serait-elle pas préférable à l'établissement d'un système hors-concours pour garantir aux postulants l'optimalité tant vantée de l'affectation?

Michel BALINSKI est chercheur au laboratoire d'économétrie de l'École polytechnique.

M. BALINSKI et G. RATIER, *Graphs and marriages*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 105, pp. 430-445, 1998.

M. BALINSKI et T. SÖNMEZ, *A tale of two mechanisms : student placement*, in *Journal of Economic Theory*, vol. 84, pp. 73-93, 1999.

M. BAÏOU et M. BALINSKI, *Many-to-many matching : stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry)*, in *Discrete Applied Mathematics*, vol. 101, pp. 1-12, 2000.

M. BAÏOU et M. BALINSKI, *Fair university admissions*, Laboratoire d'économétrie, École polytechnique, janvier 2001.
