



Pourquoi calculons-nous si difficilement?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Notre cerveau, pourtant plus puissant que le plus gros des ordinateurs, calcule très mal. Nous allons en souffrir avec l'arrivée de l'euro...

Ne pouvant me fier à mon raisonnement, j'ai appris par cœur tous les résultats possibles de toutes les multiplications possibles...

Eugène Ionesco, *La leçon*.

Le passage à l'euro inquiète car nos capacités de calcul mental sont limitées. Les questions sont, pourquoi calculons-nous aussi mal, pourquoi les ordinateurs nous sont-ils supérieurs? Pour y répondre, examinons ce que nous entendons par «calcul».

En informatique on dénomme *calcul* toute opération sur des symboles, numériques ou non : classer une liste de mots par ordre alphabétique, diviser en deux un paquet de cartes en plaçant d'un côté les rouges et de l'autre les noires, reproduire une image en réduisant sa taille de moitié, sont des calculs. Un ordinateur, quand il exécute de telles

tâches, procède uniquement par des opérations élémentaires utilisant des 0 et des 1, que l'on dénomme des opérations de calcul booléen.

Le cerveau humain, lorsqu'il travaille pour effectuer des opérations (conduire une voiture, mener une conversation, créer une œuvre d'art, etc.) fait lui aussi des calculs que les neurones exécutent en faisant circuler l'influx nerveux et en échangeant des messages chimiques. Personne ne doute aujourd'hui que, si nous l'observions à un niveau assez fin, nous verrions que le fonctionnement du cerveau se ramène à un très grand nombre de calculs élémentaires booléens.

Cette façon de concevoir le cerveau comme un ordinateur particulier nous amène à comparer les puissances de calcul : le cerveau exécute chaque seconde entre 10^{13} et 10^{19} opérations élémentaires. Or nous disposerons d'ici 30

ans au plus tard, d'ordinateurs aussi puissants que le cerveau humain, c'est-à-dire capables de réaliser autant d'opérations élémentaires de calcul que le cerveau humain : en 2030 nous serions en mesure de simuler complètement un cerveau.

La notion de *calcul abstrait*, utilisée pour désigner tout ce qui se ramène à du calcul booléen, est apparue avec les premières machines électroniques dans les années 1930 et 1940 et a été mathématisée par les travaux des théoriciens dont Claude Shannon et Alan Turing. Plus ancienne est la notion de *calcul numérique* : additionner 173 et 518, extraire la racine carrée de 83837, évaluer 2^{30} , etc. Or, le cerveau humain bien que disposant d'une puissance de *calcul abstrait* phénoménale (que, répétons-le, même les plus gros ordinateurs actuels n'atteignent pas) produit une puissance de *calcul numérique* ridiculement faible et le pourquoi de ce mystère n'est pas compris aujourd'hui.

Contrairement aux ordinateurs qui savent traduire leur puissance de *calcul abstrait* en puissance de *calcul numérique*, le cerveau humain n'en est pas capable. Nous nous émerveillons des exploits des calculateurs prodiges dont les capacités de calcul numérique n'égale même pas celles des calculatrices de poche à cinq euros qu'on trouve dans les épiceries et les grandes surfaces!

Cette situation paradoxale résulte sans doute de la spécialisation du cerveau humain qui s'est développée et a évolué aux cours des millénaires pour traiter un ensemble de problèmes vitaux : analyser les signaux qui lui proviennent de son environnement par les sens, commander et coordonner les différentes parties du corps, communiquer avec les autres membres de l'espèce humaine, etc. Contrairement à ce que notre orgueil nous incite à croire, la plasticité de notre esprit, notre capacité à nous adapter à de nouveaux problèmes sont limitées. Malgré tous nos efforts, notre cerveau reste inapte

1. TRUC DE CALCULATEURS PRODIGES

Les calculateurs prodiges utilisent souvent des trucs qui accroissent l'effet produit sur les spectateurs de leurs exploits. En général aussi ils s'astreignent à des entraînements réguliers... le tout pour des performances inférieures à celles de la plus petite calculatrice.

Voici un exemple de truc utilisé par le calculateur prodige Arthur Griffith mort en 1911 à l'âge de 31 ans. Notons qu'il omit de mentionner cette méthode dans l'ouvrage qu'il écrivit pour expliquer ses techniques de calcul mental.

Le nombre 142 857 143 est proposé par le calculateur (ou par un comparse) et un autre nombre de neuf chiffres est demandé au public, qui donne par exemple 123 456 789. Le calculateur réfléchit quelques secondes et indique que le produit des deux nombres est : 17 636 684 160 493 827, ce que le public vérifie péniblement. Comment a fait le calculateur prodige ?

RÉPONSE

Griffith ne faisait pas mentalement la multiplication (ce qui demande plusieurs minutes même aux plus forts des calculateurs prodiges) il ne faisait que diviser par 7 le nombre 123 456 789 123 456 789 (c'est le nombre de dix-huit chiffres obtenu en répétant deux fois le nombre de neuf chiffres proposé par le public). Cette opération est nettement plus facile et avec un peu d'entraînement tout le monde peut la réussir.

Le truc est que le nombre 142 857 143 est égal à $1\,000\,000\,001$ divisé par 7. Donc : $142\,857\,143 \times 123\,456\,789 = (1\,000\,000\,001 \times 123\,456\,789) / 7 = 123\,456\,789\,123\,456\,789 / 7$

2. CALCULATEUR PRODIGE ET MÉMOIRE

Récemment, l'équipe de Nathalie Tzourio du groupe l'imagerie neuro-fonctionnelle du CNRS de Caen en collaboration avec celle du neuropsychologue Mauro Pesenti de l'Université Catholique de Louvain à l'aide d'un tomographe à émission de positons (qui permet de connaître avec précision les débits sanguins des diverses parties du cerveau) ont comparé le fonctionnement du cerveau du

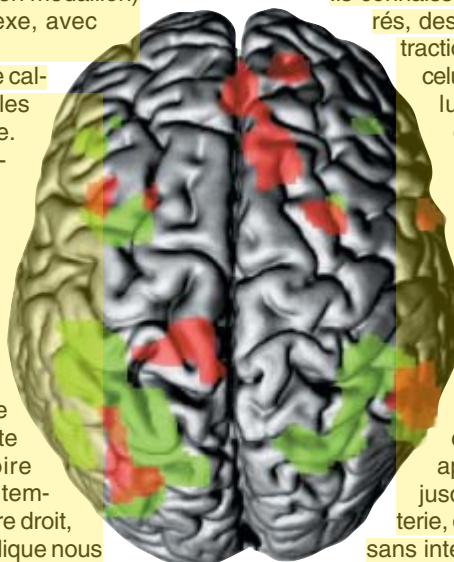
nous souvenons, pendant plusieurs jours, des événements de notre vie (le repas de ce matin, quelles personnes nous avons rencontré hier, etc.). C'est une reprogrammation du calcul qu'a effectué le calculateur prodige et ces expériences confirment ce que l'on savait déjà sur les calculateurs prodiges.

En plus de trucs permettant des effets faciles ces calculateurs s'entraînent longuement et apprennent par cœur un grand nombre de données. Souvent par exemple ils connaissent les tables de multiplication jusqu'à 100 et parfois même jusqu'à 1 000.

calculateur prodige Rüdiger Gamm (en médaillon) en train de mener un calcul complexe, avec celui d'une personne normale.

Chez les calculateurs normaux, le calcul s'effectue dans les aires pariétales et frontales de l'hémisphère gauche. Ces zones (*en vert*), traitent les informations spatiales et sont le siège de la mémoire de travail, où les résultats intermédiaires d'un calcul complexe sont stockés lors de sa réalisation. Cette mémoire a une petite capacité et les nouvelles informations y chassent immédiatement les anciennes. Le calculateur prodige Rüdiger Gamm, d'après l'étude menée, n'utilise pas seulement cette zone, mais utilise aussi sa mémoire épisodique (localisée dans les aires temporales et préfrontales de l'hémisphère droit, *en rouge*). Grâce à la mémoire épisodique nous

Ils connaissent aussi les tables des carrés, des cubes ce qui rend plus facile l'extraction des racines. Leur don est parfois plus celui de la mémoire que celui du calcul, acquis, lui, par des efforts persévérants durant des séances d'entraînement de plusieurs heures par jour pour nombres d'entre eux. Alexander Aitken (1895-1967) fut sans doute le plus fantastique calculateur prodige du XX^e siècle (ci-dessus). Professeur de mathématiques à l'Université d'Édimbourg sa mémoire des chiffres était déconcertante. Il avait appris les 707 décimales de π calculées à la main par W. Shanks en 1873. Lorsqu'on découvrit que ces décimales étaient fausses à partir de la 528-ème, il apprit les nouvelles décimales et poussa jusqu'à la millième, précisant, avec coquetterie, qu'il «ne se serait pas astreint à cet exploit sans intérêt si cela n'avait pas été très facile».



à mener des opérations numériques volumineuses et, plus généralement, à exécuter tout calcul algorithmique un tant soit peu complexe.

Deux types de machines à traiter de l'information coexistent aujourd'hui :

- les cerveaux biologiques, très puissants si l'on considère la puissance cumulée de leurs composants élémentaires, mais spécialisés et étrangement incapables de faire des calculs numériques ou algorithmiques de manière fiable ;
- les ordinateurs et leurs dérivés électroniques (consoles de jeux, lecteurs de CD-DVD, téléphones portables, etc.), bien moins puissants, mais capables d'opérer des additions entre grands nombres, d'extraire instantanément des racines cinquièmes, de factoriser des nombres de cent chiffres, de classer en quelques secondes des listes de centaines de mots, de décompresser des images ou des sons, d'échanger des volumes importants de données, etc.

Les auteurs de science-fiction imaginent qu'un jour nous suppléerons aux terribles faiblesses de notre organe de traitement de l'information en lui adjoi-

gnant, directement connecté à notre cerveau par quelques électrodes bien disposées dans notre boîte crânienne, une calculatrice électronique que nous pourrions invoquer par de simples commandes mentales. En attendant, il est intéressant de nous interroger sur les raisons qui font que notre cerveau est un si piètre calculateur numérique et qu'il reste inégalé pour tant de tâches nobles et qualifiées d'«intelligentes».

Les résultats d'Alan Turing sur les calculateurs universels semblent aussi indiquer que notre cerveau est d'un point de vue théorique un mécanisme peu puissant. Alan Turing a en effet établi que dès qu'un mécanisme de calcul sait exécuter et combiner un certain nombre d'opérations élémentaires, ce mécanisme est en mesure d'exécuter tout algorithme imaginable : être un *calculateur universel* est relativement facile et nos ordinateurs en sont tous, bien évidemment.

Notre cerveau, malgré sa complexité et sa colossale capacité en calculs élémentaires, du fait de son incapacité à mener de manière fiable de longs enchaînements d'opérations n'est pas un cal-

culateur universel : il est *concrètement* très puissant, mais *en théorie* n'atteint pas ce palier facile qui en ferait une machine apte à l'exécution de toute procédure programmable !

LA PERCEPTION DES NOMBRES

Stanislas Dehaene, spécialiste de sciences cognitives et auteur d'un excellent ouvrage (*La bosse des maths*, Éditions Odile Jacob, Paris, 1997) a étudié le fonctionnement du cerveau calculateur et a, en particulier, noté une caractéristique étonnante de notre perception des nombres ; en hommage à Lewis Carroll il a dénommé l'effet SNARC.

Cette caractéristique, dont rien d'équivalent n'existe dans un ordinateur, est que notre représentation des nombres se fait sur une ligne mentale orientée de gauche à droite : les petits nombres étant à gauche et les plus grands à droite. Cette orientation, l'effet SNARC, a de nombreuses conséquences pratiques dans nos activités de calcul : elle les facilite parfois, mais souvent les perturbe.