

Du point de vue de la psychologie évolutionniste, ce résultat neurofonctionnel est à rapprocher du rôle classiquement imputé à l'émotion dans la survie, à savoir que la peur face à un danger conduit les animaux, dont l'homme, à fuir et à l'éviter. On peut dès lors avancer, en termes darwiniens, que l'évolution a dû façonner un cerveau qui ressent des émotions nécessaires pour inhiber les comportements inadaptés, y compris lorsqu'il s'agit de logique déductive. Contrairement à ce que pensait Piaget, le cerveau humain n'est pas, à l'image d'un ordinateur, un calculateur froid et logique.

Les résultats de cette seconde expérience d'imagerie cérébrale, associés à ceux de l'équipe d'A. Damasio, indiquent que l'émotion peut aider le raisonnement. L'un des rôles essentiels de l'hémisphère droit, fortement impliqué ici, résiderait dans le «traitement spatial des émotions», c'est-à-dire dans une sensibilité aux relations entre les émotions qui détermine le comportement approprié à une situation particulière.

De l'imagerie cérébrale à la pédagogie

Soulignons que ces résultats ne sont que les tout premiers sur les bases cérébrales de la correction d'erreurs et du changement de stratégie dans le raisonnement humain. Toutefois, ils apportent déjà quelques éléments de réponse aux trois questions clés débattues en psychologie cognitive du raisonnement : raisonnons-nous logiquement ? Pourquoi commettons-nous des erreurs de raisonnement ? L'émotion peut-elle aider le raisonnement ? À propos des deux premières questions, nous avons

constaté que, dans certains cas, le cerveau fonctionne spontanément à l'économie, en recrutant par exemple un réseau neuronal fortement ancré dans la perception, ce qui démontre la matérialité des biais de raisonnement. L'imagerie cérébrale a ici permis de comprendre comment le cerveau humain, si sophistiqué soit-il, peut commettre des erreurs de logique. Nos résultats ont également conduit à découvrir la plasticité du cerveau, en l'occurrence sa capacité à inhiber un biais de raisonnement pour accéder à la logique déductive : pour que nous raisonnions correctement, des stratégies d'inhibition du fonctionnement «spontané» du cerveau doivent se mettre en place. Il s'agit de la démonstration neuronale de la flexibilité intellectuelle. Quant à la dernière question, celle du rôle de l'émotion, on y répond en montrant que certaines régions cérébrales dédiées aux émotions et au sentiment de soi participent à l'inhibition d'un biais de raisonnement, ce qui permet d'accéder à la logique.

Comme l'a récemment souligné Mark Johnson, de l'Université de Londres, les nouvelles données d'imagerie cérébrale fonctionnelle sur l'apprentissage chez l'adulte nous apportent des indications intéressantes sur les mécanismes qui sont sans doute à l'œuvre dans le développement neurocognitif de l'enfant. De ce point de vue, les résultats exposés ici nous conduisent à tenir compte, en psychologie de l'enfant et en pédagogie, de deux mécanismes sous-estimés par la théorie de Piaget : l'inhibition des stratégies compétitives et l'émotion, indispensables au cerveau pour qu'il corrige ses erreurs de raisonnement.

Olivier HOUDÉ, professeur de psychologie cognitive à l'Université Paris-5 (Sorbonne) et à l'Institut universitaire de France (IUF), est responsable de l'équipe Développement et fonctionnement cognitifs dans le Groupe d'imagerie neurofonctionnelle, UMR 6095, CNRS-CEA, Universités de Caen et Paris-5, dirigé par Bernard MAZOYER, et où travaillent également Sylvain MOUTIER, Laure ZAGO et Nathalie TZOURIO-MAZOYER.

Antonio DAMASIO, *L'erreur de Descartes*, Éditions Odile Jacob, 1995.

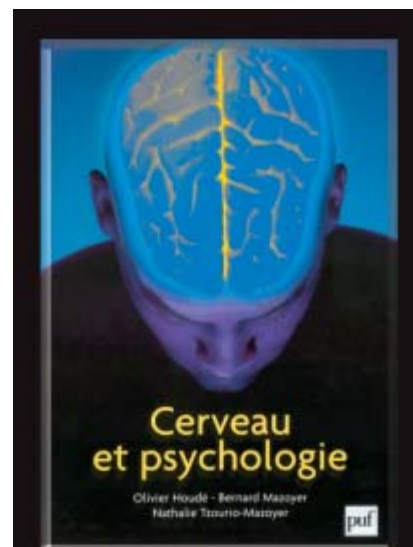
Antonio DAMASIO, *Le sentiment même de soi : Corps, émotions, conscience*, Éditions Odile Jacob, 1999.

Olivier HOUDÉ, *Inhibition and cognitive development : Object, number, categorization, and reasoning*, in *Cognitive Development*, vol. 15, pp. 63-73, 2000.

Olivier HOUDÉ et al., *Shifting from the perceptual brain to the logical brain*, in *Journal of Cognitive Neuroscience*, vol. 12, pp. 721-728, 2000.

Olivier HOUDÉ et al., *Access to deductive logic depends on a right ventromedial prefrontal area devoted to emotion and feeling*, in *NeuroImage*, vol. 14, pp. 1486-1492, 2001.

Olivier HOUDÉ, Bernard MAZOYER et Nathalie TZOURIO-MAZOYER, *Cerveau et psychologie*, PUF, 2002.



614 pages - 28 €

"La première synthèse française des données d'imagerie cérébrale et de psychologie expérimentale.

Splendides images.

Un ouvrage qui a sa place dans la bibliothèque de tout homme cultivé.

Indispensable à lire et à méditer."

Jean-Pierre Changeux,
La Recherche

"Une brillante réussite. L'ouvrage est cohérent,

le style clair et précis, les références toujours pertinentes."

Michel Imbert,
Pour la science

"Tous ceux qui s'intéressent aux énigmes du cerveau apprécieront l'exhaustivité de l'ouvrage."

Kheira Betayeb,
Science et vie

"Un événement !"

Hervé Ponchelet,
Le Point

"Un livre très richement illustré. Une référence."

Impact Médecin

puf

La taxonomie des courbes



MARCEL BERGER

Des mathématiciens explorent la diversité des courbes à la recherche de caractéristiques de classement. Vladimir Arnold a enrichi leur tâche en identifiant une nouvelle spécificité des courbes : l'«étrangeté».

L'univers des courbes a été profondément restructuré : le mathématicien russe, Vladimir Arnold, a découvert des liens de parenté insoupçonnés entre les courbes qui en précisent le classement.

De quelles courbes s'agit-il ? De celles que l'on peut dessiner à la main sur une feuille sans s'arrêter et qui se referment sur elles-mêmes ; par exemple, un cercle, un huit, un trèfle à quatre feuilles..., en bref les courbes fermées planes sans «angle». Ainsi les rectangles, les polygones, ou toute figure possédant un angle sont exclus, car pour leur tracé il faut stopper le crayon aux points angulaires. Il existe bien entendu une infinité de telles courbes fermées que les mathématiciens cherchent à classer.

Comme les entomologistes trient les espèces animales, les mathématiciens ont commencé par explorer l'espace des courbes à la recherche de caractéristiques communes : le nombre de fois où la courbe se recoupe, le nombre de régions qui la composent..., mais ces renseignements se sont révélés insuffisants pour singulariser les courbes. Les mathématiciens ont tenté alors une autre approche : transformer géométriquement les courbes afin d'identifier celles qui recèlent une similarité. Ainsi est apparue la notion d'«invariant», une propriété de la courbe conservée lors des transformations autorisées. L'invariant sert à identifier ces courbes ; c'est en quelque sorte leur nom de famille.

À la fin du XX^e siècle, les invariants mis au jour ne suffisaient pas à pleinement distinguer l'ensemble des courbes

planes. À partir de 1994, V. Arnold a fait progresser la discipline en élaborant un nouvel invariant, «l'étrangeté». Grâce à lui, les courbes ont gagné une nouvelle identité ; elles portent désormais un nom et un prénom.

Les cercles et les autres

Imaginons un quincaillier d'un genre un peu particulier qui vendrait les courbes fermées planes précédemment définies. Ses clients seraient des publicitaires à la recherche de sigles ou des architectes en mal d'inspiration. Afin de satisfaire rapidement ses clients, le quincaillier range l'infinité de courbes qu'il a en stock en catégories de même forme, ou «classes». Selon lui, deux courbes ont la même forme si en déformant l'une, on retrouve l'autre. En mathématique, ces déformations relèvent de la topologie, la branche des mathématiques où l'on ne se soucie pas du détail des formes, comme par exemple leur longueur ou leur courbure, mais où l'on veut déterminer si les formes sont transformables les unes dans les autres.

Quelles déformations le quincaillier-mathématicien autorise-t-il ? Seulement certaines, sinon toutes les courbes seraient équivalentes. On pressent, par exemple, qu'un huit et un cercle sont deux courbes différentes. Deux courbes ne seront pas équivalentes quand on ne peut passer de l'une à l'autre que par une étape de déformation interdite – une courbe à angle ou à point de rebroussement (voir la figure 2). Cette interdiction

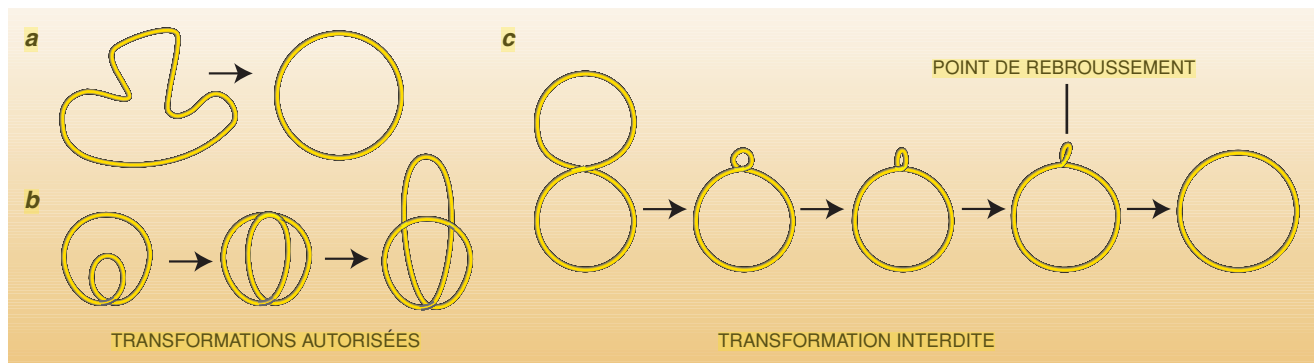
s'applique aussi aux courbes de départ ; en termes mathématiques, elles doivent avoir une dérivée non nulle par rapport aux deux variables du plan.

Par quelle catégorie de courbes le quincaillier commence-t-il ? Par celle dont nous avons le sentiment qu'elle est la plus simple : le cercle. L'ensemble des figures géométriques fermées qui ne se recoupent pas, tel le cercle, sont dites «simples». Camille Jordan, en 1900, en démontrant qu'«une courbe fermée simple possède un intérieur, qui est du point de vue de la forme, le même que celui d'un cercle, à savoir un disque», a mis un point final à leur étude. Ce qui est vrai pour l'intérieur des courbes l'est aussi de leur pourtour : si la surface intérieure est de la même forme qu'un disque, la courbe est de même forme que le cercle. Conclusion : il n'existe qu'une seule forme possible pour les courbes simples, celle du cercle.

Attaquons maintenant le cas général des courbes qui se croisent. Nous ramènerons le problème à des courbes particulières, que nous dénommerons «stables». Cette notion est fortement suggérée par un résultat dû au mathématicien américain Hassler Whitney en 1937 : toute «petite» déformation (aussi petite que l'on veut) déforme

1. AFIN DE CLASSER l'ensemble infini des courbes planes, les mathématiciens ont élaboré, à partir des caractéristiques des courbes, des «invariants», des nombres qui se conservent lorsqu'on transforme une courbe en une autre. Toutes les courbes qui ont les mêmes invariants se rangent dans la même catégorie, le même tiroir.





2. LES TRANSFORMATIONS que l'on autorise pour déformer les courbes sont celles qui ne mènent ni à un angle ni à un point de rebroussement. En procédant ainsi, on permet à n'importe quelle courbe «simple»

– sans intersection – de se transformer en cercle (a), et à une boucle de traverser les branches de la courbe mère (b). En revanche, on interdit à une boucle de disparaître (c).

n'importe quelle courbe fermée en une courbe n'ayant que des points doubles simples, c'est-à-dire des points où ne passent que deux branches de la courbe, et où ces branches ne sont pas tangentes. Prenons l'exemple d'une courbe qui se coupe trois fois en certains points. Nous les nommerons points triples :



Quand nous écartons légèrement une branche, le point triple devient trois points doubles :



De même, un point double autotangent (où les deux branches sont tangentes) :



se transforme en deux points doubles simples :



ou en deux parties de courbe sans intersection :



Grâce à Whitney, toutes les courbes, aussi compliquées soient-elles du point de vue des intersections, se ramènent à des courbes n'ayant que des points doubles simples, les courbes stables. La dénomination «stable» est justifiée : après une petite déformation, une courbe stable demeure stable (ses points doubles simples ne se transforment pas en points triples, autotangents, ou autres), tandis qu'une courbe non stable devient nécessairement stable (elle perd ses intersections complexes). Remarquons que ce théorème de Whitney entraîne une propriété intéressante d'un point de vue probabiliste : si nous tra-

çons de façon aléatoire des courbes fermées sans angle, nous avons 100 pour cent de chances qu'elle soit stable, puisque les courbes non stables forment un ensemble de probabilité nulle.

Le territoire des courbes étant ainsi défriché, tentons de trouver des caractéristiques communes aux courbes stables. Deux caractéristiques des courbes stables sautent aux yeux : le nombre N de points doubles et le nombre de régions en lesquelles la courbe partage le plan. En fait, ces deux caractéristiques ne sont pas indépendantes : le nombre de régions est égal au nombre de points doubles additionné de deux.

Le compte-tours

Cependant, regardons les deux courbes de la figure 3. Elles ont deux points doubles et pourtant elles n'appartiennent pas à la même classe, comme nous le verrons rigoureusement par la suite. Le nombre de points doubles se révèle donc insuffisant pour distinguer certaines courbes.

Pour continuer la classification des courbes, les mathématiciens ont cherché des traits conservés durant les transformations, des «invariants». Les invariants sont essentiels dans tous les problèmes de classification, quelle que soit la discipline scientifique. Le nombre de points doubles n'en est pas un, puisque, par certaines transformations, nous pouvons ajouter des boucles (voir la figure 2). Le premier invariant que les mathématiciens ont trouvé est le nombre de rotation (ou d'enroulement) ; il est noté R et est égal, si nous ne demandons pas trop de rigueur, au nombre de fois dont la tangente à la courbe tourne le long du tracé. Puisque la courbe est fermée, en divisant ce nombre R par 2π , nous obtenons un nombre entier, plus agréable à manipuler ; il est tou-

jours pris positif (au besoin, on change le sens de parcours de la courbe). Pour le cercle, il est égal à 1 puisque la tangente tourne de 2π . Il en est de même pour la courbe tortueuse de la figure 4.

En fait, le théorème «de la tangente qui tourne» affirme que ce nombre de rotation est égal à 1 pour toutes les courbes simples (les courbes sans point double) : dans des courbes simples, mais sinueuses, la tangente paraît tourner plus, toutefois il y a finalement compensation quand elle «revient en arrière» (voir la figure 4). Une conséquence amusante est le «théorème du boulevard périphérique» : quelles que soient les contorsions du boulevard périphérique, la longueur de la voie extérieure n'excède celle de la voie intérieure que du produit de l'espacement entre les deux files par 2π . Si vous avez à parcourir la moitié du périphérique, inutile de prendre la voie intérieure pensant gagner du temps, vous ne gagneriez qu'une dizaine de mètres !

Bien que d'apparence simple, le théorème de la tangente qui tourne n'a été démontré qu'au XX^e siècle, la première fois de façon complexe en 1916 par Watson. En 1935, dans la même revue mathématique, Alexander Ostrowski et Heinz Hopf en ont publié chacun une autre preuve. Ostrowski a procédé en approximant la courbe par des polygones, en démontrant le théorème pour ceux-ci, puis en passant à la limite. Hopf, lui, a construit une déformation entre les tangentes à la courbe et les points d'un cercle parcouru à vitesse constante. Des deux démonstrations, celle de Hopf est la plus conceptuelle, celle d'Ostrowski, la plus simple.

Il existe un moyen simple d'évaluer le nombre de rotations d'une courbe à partir du nombre de points doubles. Il faut pour cela donner un