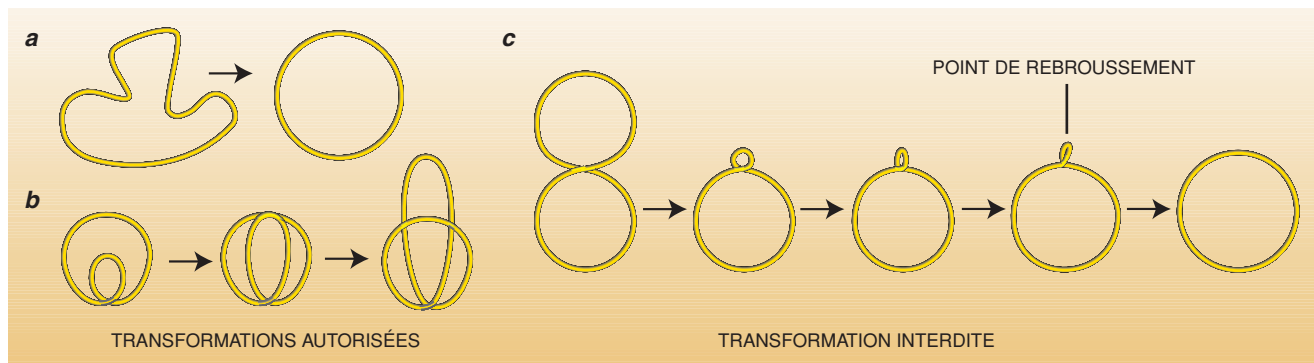




2. LES TRANSFORMATIONS que l'on autorise pour déformer les courbes sont celles qui ne mènent ni à un angle ni à un point de rebroussement. En procédant ainsi, on permet à n'importe quelle courbe «simple»

– sans intersection – de se transformer en cercle (a), et à une boucle de traverser les branches de la courbe mère (b). En revanche, on interdit à une boucle de disparaître (c).

n'importe quelle courbe fermée en une courbe n'ayant que des points doubles simples, c'est-à-dire des points où ne passent que deux branches de la courbe, et où ces branches ne sont pas tangentes. Prenons l'exemple d'une courbe qui se coupe trois fois en certains points. Nous les nommerons points triples :



Quand nous écartons légèrement une branche, le point triple devient trois points doubles :



De même, un point double autotangent (où les deux branches sont tangentes) :



se transforme en deux points doubles simples :



ou en deux parties de courbe sans intersection :



Grâce à Whitney, toutes les courbes, aussi compliquées soient-elles du point de vue des intersections, se ramènent à des courbes n'ayant que des points doubles simples, les courbes stables. La dénomination «stable» est justifiée : après une petite déformation, une courbe stable demeure stable (ses points doubles simples ne se transforment pas en points triples, autotangents, ou autres), tandis qu'une courbe non stable devient nécessairement stable (elle perd ses intersections complexes). Remarquons que ce théorème de Whitney entraîne une propriété intéressante d'un point de vue probabiliste : si nous tra-

çons de façon aléatoire des courbes fermées sans angle, nous avons 100 pour cent de chances qu'elle soit stable, puisque les courbes non stables forment un ensemble de probabilité nulle.

Le territoire des courbes étant ainsi défriché, tentons de trouver des caractéristiques communes aux courbes stables. Deux caractéristiques des courbes stables sautent aux yeux : le nombre N de points doubles et le nombre de régions en lesquelles la courbe partage le plan. En fait, ces deux caractéristiques ne sont pas indépendantes : le nombre de régions est égal au nombre de points doubles additionné de deux.

Le compte-tours

Cependant, regardons les deux courbes de la figure 3. Elles ont deux points doubles et pourtant elles n'appartiennent pas à la même classe, comme nous le verrons rigoureusement par la suite. Le nombre de points doubles se révèle donc insuffisant pour distinguer certaines courbes.

Pour continuer la classification des courbes, les mathématiciens ont cherché des traits conservés durant les transformations, des «invariants». Les invariants sont essentiels dans tous les problèmes de classification, quelle que soit la discipline scientifique. Le nombre de points doubles n'en est pas un, puisque, par certaines transformations, nous pouvons ajouter des boucles (voir la figure 2). Le premier invariant que les mathématiciens ont trouvé est le nombre de rotation (ou d'enroulement) ; il est noté R et est égal, si nous ne demandons pas trop de rigueur, au nombre de fois dont la tangente à la courbe tourne le long du tracé. Puisque la courbe est fermée, en divisant ce nombre R par 2π , nous obtenons un nombre entier, plus agréable à manipuler ; il est tou-

jours pris positif (au besoin, on change le sens de parcours de la courbe). Pour le cercle, il est égal à 1 puisque la tangente tourne de 2π . Il en est de même pour la courbe tortueuse de la figure 4.

En fait, le théorème «de la tangente qui tourne» affirme que ce nombre de rotation est égal à 1 pour toutes les courbes simples (les courbes sans point double) : dans des courbes simples, mais sinueuses, la tangente paraît tourner plus, toutefois il y a finalement compensation quand elle «revient en arrière» (voir la figure 4). Une conséquence amusante est le «théorème du boulevard périphérique» : quelles que soient les contorsions du boulevard périphérique, la longueur de la voie extérieure n'excède celle de la voie intérieure que du produit de l'espacement entre les deux files par 2π . Si vous avez à parcourir la moitié du périphérique, inutile de prendre la voie intérieure pensant gagner du temps, vous ne gagneriez qu'une dizaine de mètres !

Bien que d'apparence simple, le théorème de la tangente qui tourne n'a été démontré qu'au XX^e siècle, la première fois de façon complexe en 1916 par Watson. En 1935, dans la même revue mathématique, Alexander Ostrowski et Heinz Hopf en ont publié chacun une autre preuve. Ostrowski a procédé en approximant la courbe par des polygones, en démontrant le théorème pour ceux-ci, puis en passant à la limite. Hopf, lui, a construit une déformation entre les tangentes à la courbe et les points d'un cercle parcouru à vitesse constante. Des deux démonstrations, celle de Hopf est la plus conceptuelle, celle d'Ostrowski, la plus simple.

Il existe un moyen simple d'évaluer le nombre de rotations d'une courbe à partir du nombre de points doubles. Il faut pour cela donner un

sens de parcours à la courbe et distinguer les points doubles orientés ainsi :



les points doubles dits positifs, en nombre N^+ , et ceux-là :



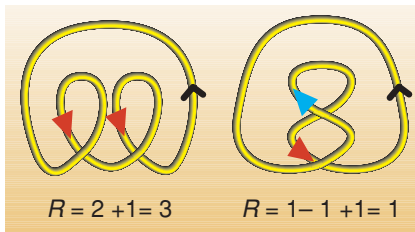
les points doubles négatifs, en nombre N^- . Comme ils correspondent tous deux à des boucles parcourues dans des sens différents, on sent bien que les contributions à R des points doubles positifs et négatifs se compensent. Whitney a démontré que le nombre de rotation de la courbe est égal à $N^+ - N^- + 1$ (l'ajout de 1 tient compte du fait que si la courbe n'a aucun point double, le nombre de rotation vaut déjà un). La figure 3 montre l'application de cette méthode à deux exemples.

Pourquoi le nombre de rotation est-il un invariant des transformations ? Puisque les déformations appliquées aux courbes sont continues, le nombre de rotation, s'il change, doit lui aussi évoluer continûment. Or c'est un nombre entier, donc condamné à varier par sauts. Il doit alors conserver sa valeur lors des déformations autorisées des courbes. Cela étant, pour être pertinent, le nombre de rotation ne doit pas être équivalent à l'autre nombre entier attaché aux courbes, le nombre de points doubles : deux courbes ayant le même nombre de points doubles doivent pouvoir posséder des nombres de rotation différents. C'est bien le cas des deux courbes de la figure 3.

Le quincaillier a maintenant classé ses courbes dans des piles en fonction du nombre de points doubles et du nombre de rotation (voir la figure 5). La pile des courbes à nombre de rotation nul et à un point double, par exemple, contient un seul exemplaire, le huit ; celle à deux points doubles et à nombre de rotation égal à 1, en contient trois :



Remarquons que si le quincaillier rangeait ces courbes dans des tiroirs étiquetés avec tous les couples (R, N) possibles, certains tiroirs resteraient vides, car pour une même courbe, R et N ne sont pas indépendants. Puisque $R = N^+ - N^- + 1$ et que N est la somme des points doubles positifs et négatifs, R ne dépasse jamais $1 + N$. Il est par exemple inutile d'essayer de tracer une courbe dont le nombre R est égal à quatre n'ayant que deux points doubles.

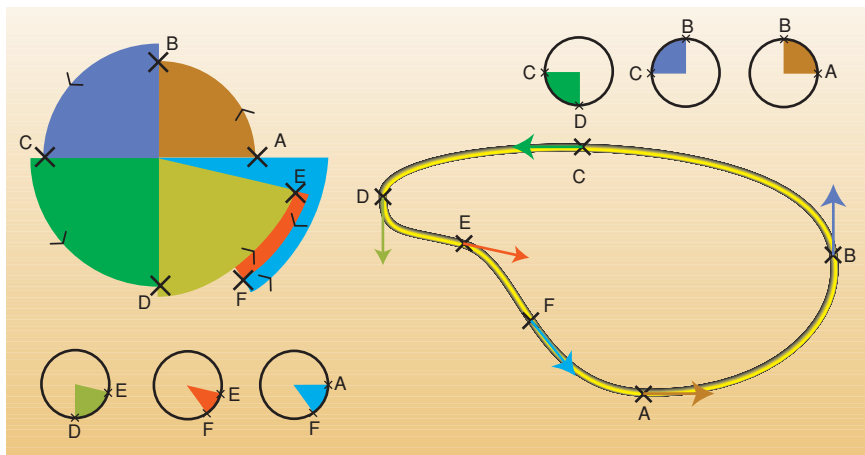


3. LE NOMBRE DE ROTATION se calcule à partir des nombres de points doubles positifs, N^+ (en rouge) et négatifs, N^- (en bleu) : $R = N^+ - N^- + 1$. Présentant deux points doubles, ces courbes au nombre de rotation différent n'appartiennent donc pas à la même classe.

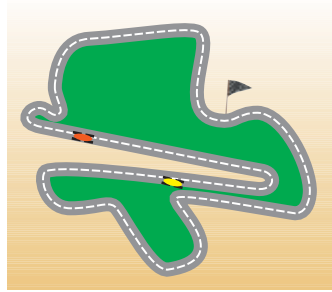
Le quincaillier reste perplexe : certaines piles sont trop importantes, et de toute façon, il préférerait que chacune des piles ne contienne qu'une seule courbe, c'est-à-dire que l'ensemble des caractéristiques qui définissent la pile déterminent sans ambiguïté une seule courbe. Les vis que je vends, se dit le quincaillier, sont classées selon leur diamètre, leur longueur et le type de leur tête (un écrou ou une tête lisse) : j'aimerais qu'il en soit de même avec les courbes. Les deux courbes :



ont le même nombre de rotation – trois –, et le même nombre de points doubles – deux –, mais n'ont pas la même forme (encore une fois, on ne peut les transformer l'une dans l'autre avec les règles permises). Un moyen de les distinguer existe certainement.



4. LE NOMBRE DE ROTATION D'UNE COURBE SIMPLE vaut 1. Dans cet exemple, l'angle que fait la tangente à la courbe par rapport à l'horizontale augmente continûment entre les points A à E (la variation de l'angle entre chaque point est indiqué dans les cercles). Il diminue ensuite jusqu'au point F, à partir duquel il augmente à nouveau. La somme des variations de l'angle sur toutes les sections de la courbe (en haut à gauche) montre qu'après un tour de la courbe la tangente a tourné exactement de 2π , ce qui signifie que le nombre R de rotation est 1. Ce résultat est valable pour toutes les courbes simples, même si celles-ci sont très sinueuses, comme ici le circuit de formule 1 de Sepang en Malaisie (en bas à droite).



L'étrangeté

V. Arnold, des Universités de Paris-Dauphine et de Moscou, qui réfléchissait à des débouchés de la théorie des nœuds sur les mathématiques des courbes planes (voir la figure 7), a conçu un tel troisième invariant en 1994. Initialement obtenu par un savant calcul, la signification géométrique de ce nombre s'est révélé simple dans le cas de certaines courbes dites minimales. Les courbes minimales sont celles qui, pour un nombre de rotation donné, ont le moins de points doubles possibles. Par exemple, parmi les courbes à nombre de rotation égal à deux, il n'y a qu'une courbe minimale,



toutes les autres ont plus d'un point double. Pour se représenter géométriquement l'étrangeté chez cette famille de courbes, V. Arnold s'est inspiré des diagrammes du prince des mathématiciens, Carl Friedrich Gauss, au XIX^e siècle. Gauss avait imaginé ces diagrammes pour étudier les nœuds. Les courbes y sont représentées par des cercles : on parcourt le cercle en même temps que la courbe, et dès qu'on parvient à un point double, on marque un point sur le cercle, de sorte que chaque point double donne deux points sur le cercle ; on relie ensuite ces deux points par un segment. Le résultat obtenu est