

sens de parcours à la courbe et distinguer les points doubles orientés ainsi :



les points doubles dits positifs, en nombre N^+ , et ceux-là :



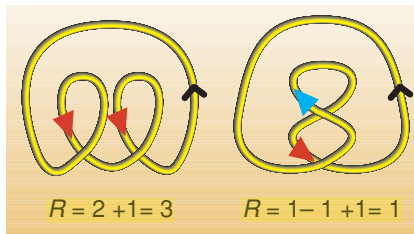
les points doubles négatifs, en nombre N^- . Comme ils correspondent tous deux à des boucles parcourues dans des sens différents, on sent bien que les contributions à R des points doubles positifs et négatifs se compensent. Whitney a démontré que le nombre de rotation de la courbe est égal à $N^+ - N^- + 1$ (l'ajout de 1 tient compte du fait que si la courbe n'a aucun point double, le nombre de rotation vaut déjà un). La figure 3 montre l'application de cette méthode à deux exemples.

Pourquoi le nombre de rotation est-il un invariant des transformations ? Puisque les déformations appliquées aux courbes sont continues, le nombre de rotation, s'il change, doit lui aussi évoluer continûment. Or c'est un nombre entier, donc condamné à varier par sauts. Il doit alors conserver sa valeur lors des déformations autorisées des courbes. Cela étant, pour être pertinent, le nombre de rotation ne doit pas être équivalent à l'autre nombre entier attaché aux courbes, le nombre de points doubles : deux courbes ayant le même nombre de points doubles doivent pouvoir posséder des nombres de rotation différents. C'est bien le cas des deux courbes de la figure 3.

Le quincaillier a maintenant classé ses courbes dans des piles en fonction du nombre de points doubles et du nombre de rotation (voir la figure 5). La pile des courbes à nombre de rotation nul et à un point double, par exemple, contient un seul exemplaire, le huit ; celle à deux points doubles et à nombre de rotation égal à 1, en contient trois :



Remarquons que si le quincaillier rangeait ces courbes dans des tiroirs étiquetés avec tous les couples (R, N) possibles, certains tiroirs resteraient vides, car pour une même courbe, R et N ne sont pas indépendants. Puisque $R = N^+ - N^- + 1$ et que N est la somme des points doubles positifs et négatifs, R ne dépasse jamais $1 + N$. Il est par exemple inutile d'essayer de tracer une courbe dont le nombre R est égal à quatre n'ayant que deux points doubles.

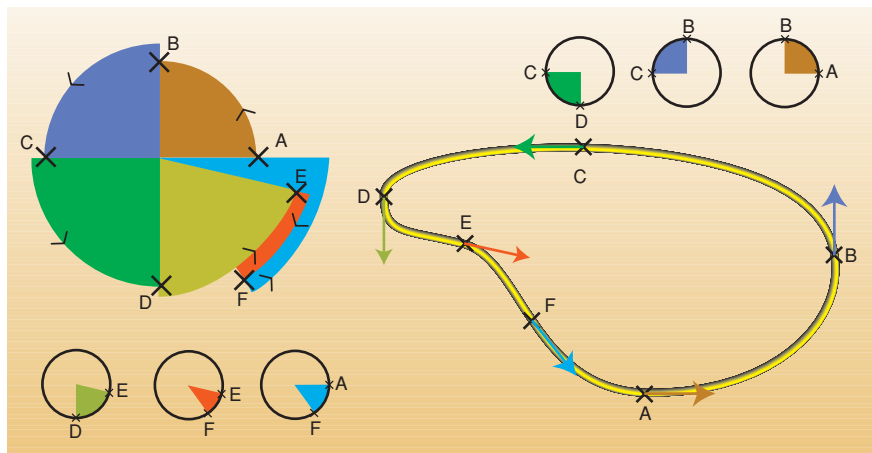


3. LE NOMBRE DE ROTATION se calcule à partir des nombres de points doubles positifs, N^+ (en rouge) et négatifs, N^- (en bleu) : $R = N^+ - N^- + 1$. Présentant deux points doubles, ces courbes au nombre de rotation différent n'appartiennent donc pas à la même classe.

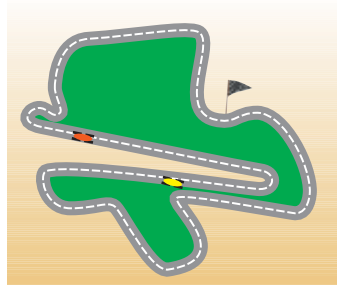
Le quincaillier reste perplexe : certaines piles sont trop importantes, et de toute façon, il préférerait que chacune des piles ne contienne qu'une seule courbe, c'est-à-dire que l'ensemble des caractéristiques qui définissent la pile déterminent sans ambiguïté une seule courbe. Les vis que je vends, se dit le quincaillier, sont classées selon leur diamètre, leur longueur et le type de leur tête (un écrou ou une tête lisse) : j'aimerais qu'il en soit de même avec les courbes. Les deux courbes :



ont le même nombre de rotation – trois –, et le même nombre de points doubles – deux –, mais n'ont pas la même forme (encore une fois, on ne peut les transformer l'une dans l'autre avec les règles permises). Un moyen de les distinguer existe certainement.



4. LE NOMBRE DE ROTATION D'UNE COURBE SIMPLE vaut 1. Dans cet exemple, l'angle que fait la tangente à la courbe par rapport à l'horizontale augmente continûment entre les points A à E (la variation de l'angle entre chaque point est indiqué dans les cercles). Il diminue ensuite jusqu'au point F, à partir duquel il augmente à nouveau. La somme des variations de l'angle sur toutes les sections de la courbe (en haut à gauche) montre qu'après un tour de la courbe la tangente a tourné exactement de 2π , ce qui signifie que le nombre R de rotation est 1. Ce résultat est valable pour toutes les courbes simples, même si celles-ci sont très sinueuses, comme ici le circuit de formule 1 de Sepang en Malaisie (en bas à droite).



L'étrangeté

V. Arnold, des Universités de Paris-Dauphine et de Moscou, qui réfléchissait à des débouchés de la théorie des nœuds sur les mathématiques des courbes planes (voir la figure 7), a conçu un tel troisième invariant en 1994. Initialement obtenu par un savant calcul, la signification géométrique de ce nombre s'est révélé simple dans le cas de certaines courbes dites minimales. Les courbes minimales sont celles qui, pour un nombre de rotation donné, ont le moins de points doubles possibles. Par exemple, parmi les courbes à nombre de rotation égal à deux, il n'y a qu'une courbe minimale,



toutes les autres ont plus d'un point double. Pour se représenter géométriquement l'étrangeté chez cette famille de courbes, V. Arnold s'est inspiré des diagrammes du prince des mathématiciens, Carl Friedrich Gauss, au XIX^e siècle. Gauss avait imaginé ces diagrammes pour étudier les nœuds. Les courbes y sont représentées par des cercles : on parcourt le cercle en même temps que la courbe, et dès qu'on parvient à un point double, on marque un point sur le cercle, de sorte que chaque point double donne deux points sur le cercle ; on relie ensuite ces deux points par un segment. Le résultat obtenu est