

sens de parcours à la courbe et distinguer les points doubles orientés ainsi :



les points doubles dits positifs, en nombre N^+ , et ceux-là :



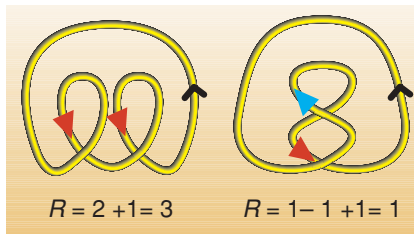
les points doubles négatifs, en nombre N^- . Comme ils correspondent tous deux à des boucles parcourues dans des sens différents, on sent bien que les contributions à R des points doubles positifs et négatifs se compensent. Whitney a démontré que le nombre de rotation de la courbe est égal à $N^+ - N^- + 1$ (l'ajout de 1 tient compte du fait que si la courbe n'a aucun point double, le nombre de rotation vaut déjà un). La figure 3 montre l'application de cette méthode à deux exemples.

Pourquoi le nombre de rotation est-il un invariant des transformations ? Puisque les déformations appliquées aux courbes sont continues, le nombre de rotation, s'il change, doit lui aussi évoluer continûment. Or c'est un nombre entier, donc condamné à varier par sauts. Il doit alors conserver sa valeur lors des déformations autorisées des courbes. Cela étant, pour être pertinent, le nombre de rotation ne doit pas être équivalent à l'autre nombre entier attaché aux courbes, le nombre de points doubles : deux courbes ayant le même nombre de points doubles doivent pouvoir posséder des nombres de rotation différents. C'est bien le cas des deux courbes de la figure 3.

Le quinquailier a maintenant classé ses courbes dans des piles en fonction du nombre de points doubles et du nombre de rotation (voir la figure 5). La pile des courbes à nombre de rotation nul et à un point double, par exemple, contient un seul exemplaire, le huit ; celle à deux points doubles et à nombre de rotation égal à 1, en contient trois :



Remarquons que si le quinquailier rangeait ces courbes dans des tiroirs étiquetés avec tous les couples (R, N) possibles, certains tiroirs resteraient vides, car pour une même courbe, R et N ne sont pas indépendants. Puisque $R = N^+ - N^- + 1$ et que N est la somme des points doubles positifs et négatifs, R ne dépasse jamais $1 + N$. Il est par exemple inutile d'essayer de tracer une courbe dont le nombre R est égal à quatre n'ayant que deux points doubles.

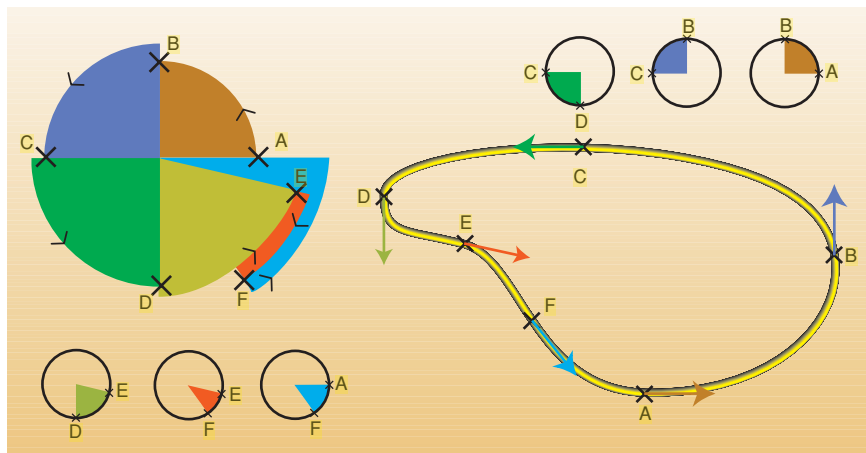


3. LE NOMBRE DE ROTATION se calcule à partir des nombres de points doubles positifs, N^+ (en rouge) et négatifs, N^- (en bleu) : $R = N^+ - N^- + 1$. Présentant deux points doubles, ces courbes au nombre de rotation différent n'appartiennent donc pas à la même classe.

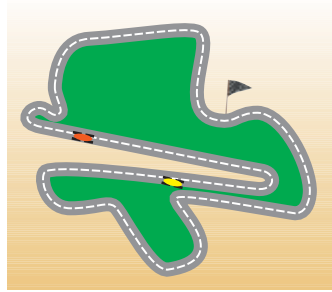
Le quinquailier reste perplexe : certaines piles sont trop importantes, et de toute façon, il préférerait que chacune des piles ne contienne qu'une seule courbe, c'est-à-dire que l'ensemble des caractéristiques qui définissent la pile déterminent sans ambiguïté une seule courbe. Les vis que je vends, se dit le quinquailier, sont classées selon leur diamètre, leur longueur et le type de leur tête (un écrou ou une tête lisse) : j'aimerais qu'il en soit de même avec les courbes. Les deux courbes :



ont le même nombre de rotation – trois –, et le même nombre de points doubles – deux –, mais n'ont pas la même forme (encore une fois, on ne peut les transformer l'une dans l'autre avec les règles permises). Un moyen de les distinguer existe certainement.



4. LE NOMBRE DE ROTATION D'UNE COURBE SIMPLE vaut 1. Dans cet exemple, l'angle que fait la tangente à la courbe par rapport à l'horizontale augmente continûment entre les points A à E (la variation de l'angle entre chaque point est indiqué dans les cercles). Il diminue ensuite jusqu'au point F, à partir duquel il augmente à nouveau. La somme des variations de l'angle sur toutes les sections de la courbe (en haut à gauche) montre qu'après un tour de la courbe la tangente a tourné exactement de 2π , ce qui signifie que le nombre R de rotation est 1. Ce résultat est valable pour toutes les courbes simples, même si celles-ci sont très sinueuses, comme ici le circuit de formule 1 de Sepang en Malaisie (en bas à droite).



L'étrangeté

V. Arnold, des Universités de Paris-Dauphine et de Moscou, qui réfléchissait à des débouchés de la théorie des nœuds sur les mathématiques des courbes planes (voir la figure 7), a conçu un tel troisième invariant en 1994. Initialement obtenu par un savant calcul, la signification géométrique de ce nombre s'est révélé simple dans le cas de certaines courbes dites minimales. Les courbes minimales sont celles qui, pour un nombre de rotation donné, ont le moins de points doubles possibles. Par exemple, parmi les courbes à nombre de rotation égal à deux, il n'y a qu'une courbe minimale,



toutes les autres ont plus d'un point double. Pour se représenter géométriquement l'étrangeté chez cette famille de courbes, V. Arnold s'est inspiré des diagrammes du prince des mathématiciens, Carl Friedrich Gauss, au XIX^e siècle. Gauss avait imaginé ces diagrammes pour étudier les nœuds. Les courbes y sont représentées par des cercles : on parcourt le cercle en même temps que la courbe, et dès qu'on parvient à un point double, on marque un point sur le cercle, de sorte que chaque point double donne deux points sur le cercle ; on relie ensuite ces deux points par un segment. Le résultat obtenu est

R \ N	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					

5. ENSEMBLE DES COURBES qui possèdent de zéro à trois points doubles (N) et dont le nombre de rotation (R) est compris entre zéro et quatre. On voit que le nombre de courbes à N donné augmente rapidement avec N . Il a été démontré qu'il croît exponentiellement avec N .

un cercle traversé de cordes. Le diagramme de Gauss de la courbe précédente est ainsi :



V. Arnold (voir la figure 6) a transformé ces cercles en arbres de points où

chaque point correspond à une région intérieure au cercle comprise entre deux cordes. Par exemple, le diagramme précédent donne l'arbre :



Arnold a découvert sur cet arbre un

point qui joue un rôle particulier, qu'il a nommé la racine de l'arbre. On a l'habitude de marquer ce point en noir et de noter l'arbre de la courbe avec la racine en bas :

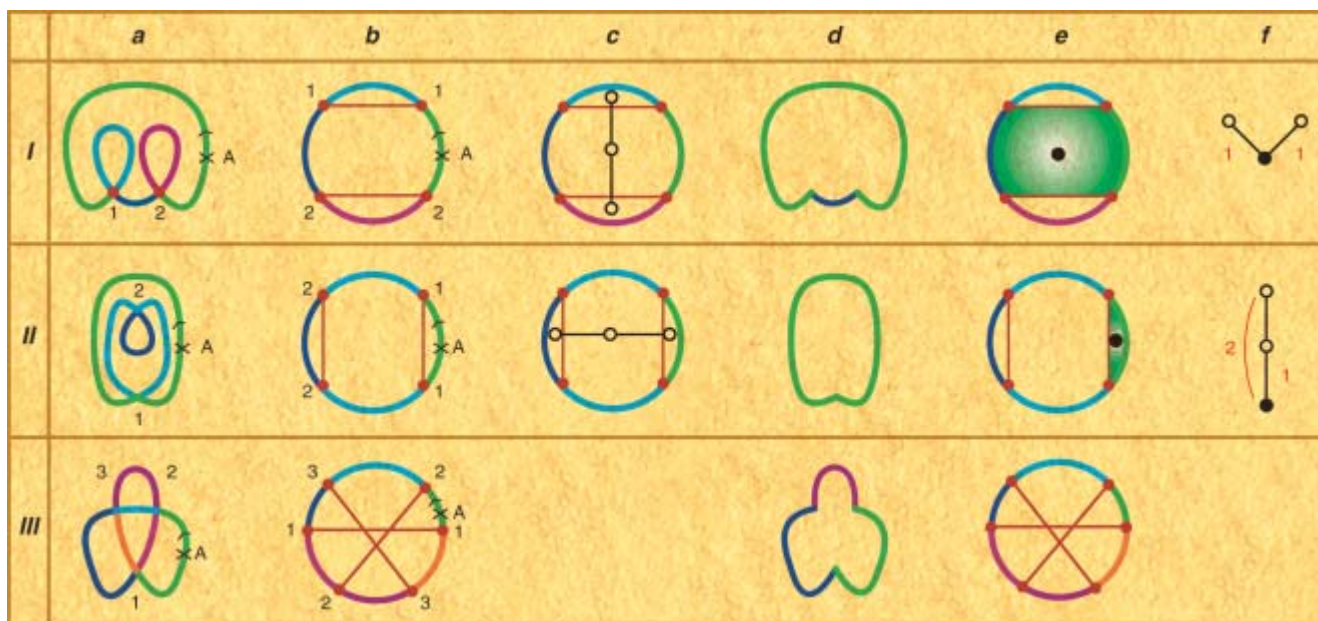


L'étrangeté se calcule ensuite comme la somme des distances (nombre de points à passer) séparant chacun des points de l'arbre à la racine.

La construction donnant l'étrangeté est détaillée sur la figure 6. Quand les branches des arbres n'ont qu'un seul point, comme dans le cas précédent, l'étrangeté est égale au nombre total de points, donc au nombre de points doubles N de la courbe. Quand l'arbre n'a pas d'embranchement, comme :



elle vaut $1 + 2 + 3 + \dots + N = N(N+1)/2$. L'étrangeté permet de distinguer les deux courbes que ni le nombre de points doubles ni le nombre de rotation ne suffisaient à différencier. Elle vaut deux pour la courbe (voir la figure 6) :



6. L'ARBRE D'UNE COURBE est établi en plusieurs étapes à partir d'une version découpée de la courbe en sections (a) indiquées par des couleurs différentes. Chaque section est une portion de la courbe comprise entre deux intersections. Ces sections sont ensuite mises bout à bout sur un cercle qui représente une version « dépliée » de la courbe. Puis on joint par des cordes les points du cercle qui correspondent aux mêmes intersections (b). Les cordes délimitent des régions de l'intérieur du cercle (les petits cercles de la figure c) que l'on relie ensemble quand elles sont adjacentes. Ces points reliés constituent l'« arbre » de

la courbe, dont l'un d'eux joue le rôle de racine. La racine est le point qui appartient à la région bordée par les cordes correspondant au pourtour extérieur de la courbe (d). Cette région est indiquée en vert (e). Perché sur sa racine, l'arbre devient la figure f et l'étrangeté est égale à 2 (somme des distances des points à la racine : $1 + 1$). Un autre exemple de ces opérations est représenté sur la ligne II, pour une courbe d'étrangeté 3 ($1 + 2$). Dans le cas d'une courbe non minimale (III) cette construction ne permet pas de trouver une racine de l'arbre et l'étrangeté n'a pas d'interprétation aussi simple.

7. Les courbes : le nœud de l'affaire

V Arnold est parvenu à ses résultats sur les courbes par le biais de la théorie des nœuds. Les nœuds sont le pendant à trois dimensions des courbes : des cordes repliées sur elles-mêmes et qui sont nouées par endroits. V. Arnold pensait trouver dans la théorie des nœuds – où l'on cherche aussi à classer les nœuds en catégories – une source d'inspiration pour trouver de nouveaux invariants des courbes. Le lien théorique qu'il voulait établir entre ces deux types d'objets mathématiques provient d'une méthode précédemment découverte consistant à construire un nœud à partir d'une courbe plane. La méthode est peu intuitive : si l'on se contentait de «déplier» à trois dimensions la courbe plane, on obtiendrait une courbe non nouée. Cette méthode consiste à placer sur la troisième direction de l'espace (en plus des deux de la courbe), un axe gradué en degrés. Ensuite, on déplace la courbe le long de cet axe, et l'on marque les points de la courbe dont la tangente par rapport à l'horizontale est égale à la valeur de l'axe où l'on se trouve.

Prenons l'exemple présenté ci-dessous du cercle. Partons du point A, situé en bas du cercle. Puisque la tangente y est nulle, nous plaçons la courbe à la valeur 0° sur l'axe des tangentes et marquons d'un point rouge le point A. C'est le premier point du nœud. Ensuite, parcourons le cercle dans le sens trigonométrique : la tangente s'incline, si bien que nous devons avancer en même temps la courbe le long de l'axe des tangentes. Nous traçons ainsi les points rouges situés à droite de A sur la figure. Quand nous sommes au point B du cercle, la tangente est verticale, puis au point C, elle vaut 180° . Comme une tangente n'est pas

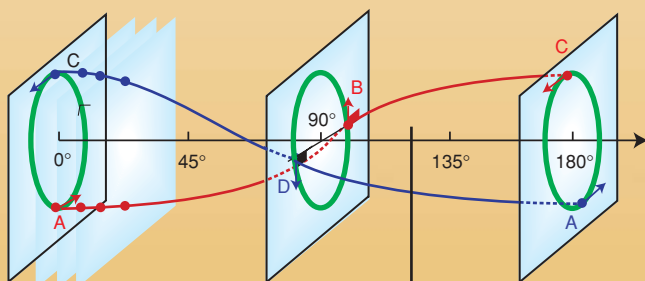
une droite orientée, 180° et 0° sont équivalents. Nous repartons donc à 0° pour recommencer l'opération le long de l'axe et continuer le tracé du nœud (courbe bleue). Ce dessin de la partie bleue nous fait revenir au point A. Pour obtenir le nœud, il nous reste à refermer l'axe des angles sur lui-même afin de superposer 0° et 180° : les différentes parties de la courbe se rejoignent et forment un nœud continu. En suivant ce procédé, un cercle donne une corde à deux boucles.

Le second exemple de nœud, dessiné à partir d'une courbe à un point double, a été tracé avec l'axe des angles déjà replié sur lui-même. Comme pour le cercle, les points A, B et C sont les points de la courbe dont la tangente est respectivement inclinée de 0° , 90° et 180° .

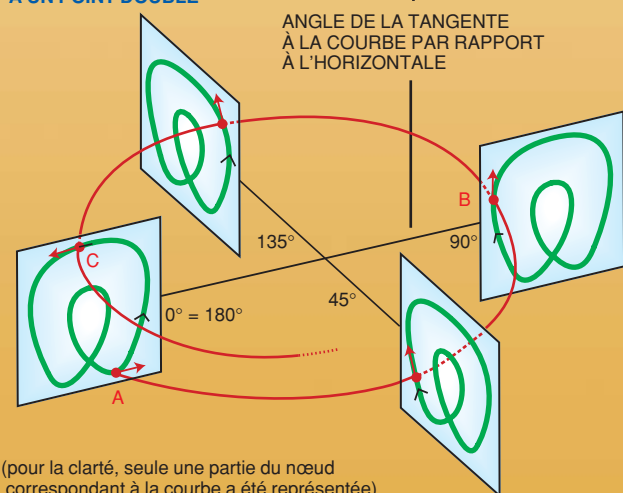
Nous pouvons préciser le volume de l'espace dans lequel les nœuds ainsi conçus se retrouvent. Puisqu'en définitive nous avons fait évoluer la courbe le long d'un cercle, le nœud est contenu dans l'enveloppe de la courbe (son pourtour) «multipliée» par le cercle, ce qui donne un volume délimité par un tore. L'analogie entre courbes et nœuds est telle que pour dénouer le nœud, il nous faut rester à l'intérieur de ce tore. Ainsi, bien que les deux nœuds de la figure soient dénouables dans l'espace tout entier, ils sont indénuables à l'intérieur du tore.

Ce lien entre courbes et nœuds ne fut pas aussi fructueux que V. Arnold l'escomptait, aussi dût-il explorer des voies inédites. Selon lui, malgré les apparences, l'univers des courbes planes est plus complexe que celui des nœuds dans l'espace.

CAS DU CERCLE



CAS D'UNE COURBE À UN POINT DOUBLE



(pour la clarté, seule une partie du nœud correspondant à la courbe a été représentée)

