

7. Les courbes : le nœud de l'affaire

V Arnold est parvenu à ses résultats sur les courbes par le biais de la théorie des nœuds. Les nœuds sont le pendant à trois dimensions des courbes : des cordes repliées sur elles-mêmes et qui sont nouées par endroits. V. Arnold pensait trouver dans la théorie des nœuds – où l'on cherche aussi à classer les nœuds en catégories – une source d'inspiration pour trouver de nouveaux invariants des courbes. Le lien théorique qu'il voulait établir entre ces deux types d'objets mathématiques provient d'une méthode précédemment découverte consistant à construire un nœud à partir d'une courbe plane. La méthode est peu intuitive : si l'on se contentait de «déplier» à trois dimensions la courbe plane, on obtiendrait une courbe non nouée. Cette méthode consiste à placer sur la troisième direction de l'espace (en plus des deux de la courbe), un axe gradué en degrés. Ensuite, on déplace la courbe le long de cet axe, et l'on marque les points de la courbe dont la tangente par rapport à l'horizontale est égale à la valeur de l'axe où l'on se trouve.

Prenons l'exemple présenté ci-dessous du cercle. Partons du point A, situé en bas du cercle. Puisque la tangente y est nulle, nous plaçons la courbe à la valeur 0° sur l'axe des tangentes et marquons d'un point rouge le point A. C'est le premier point du nœud. Ensuite, parcourons le cercle dans le sens trigonométrique : la tangente s'incline, si bien que nous devons avancer en même temps la courbe le long de l'axe des tangentes. Nous traçons ainsi les points rouges situés à droite de A sur la figure. Quand nous sommes au point B du cercle, la tangente est verticale, puis au point C, elle vaut 180° . Comme une tangente n'est pas

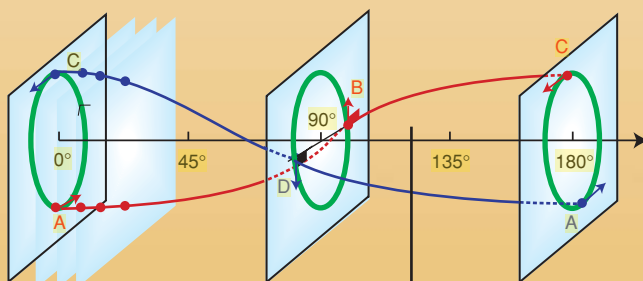
une droite orientée, 180° et 0° sont équivalents. Nous repartons donc à 0° pour recommencer l'opération le long de l'axe et continuer le tracé du nœud (courbe bleue). Ce dessin de la partie bleue nous fait revenir au point A. Pour obtenir le nœud, il nous reste à refermer l'axe des angles sur lui-même afin de superposer 0° et 180° : les différentes parties de la courbe se rejoignent et forment un nœud continu. En suivant ce procédé, un cercle donne une corde à deux boucles.

Le second exemple de nœud, dessiné à partir d'une courbe à un point double, a été tracé avec l'axe des angles déjà replié sur lui-même. Comme pour le cercle, les points A, B et C sont les points de la courbe dont la tangente est respectivement inclinée de 0° , 90° et 180° .

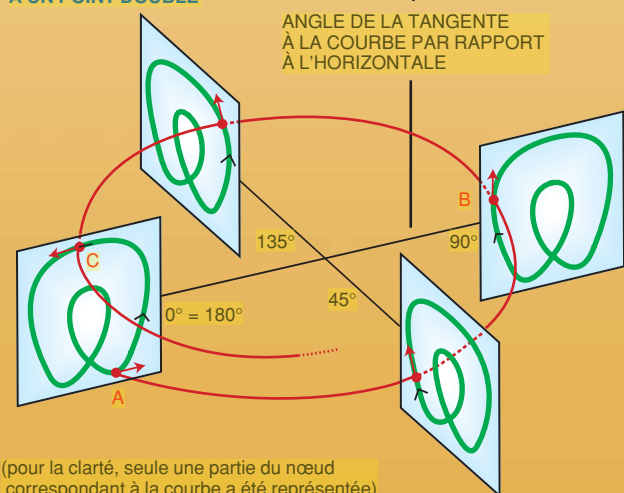
Nous pouvons préciser le volume de l'espace dans lequel les nœuds ainsi conçus se retrouvent. Puisqu'en définitive nous avons fait évoluer la courbe le long d'un cercle, le nœud est contenu dans l'enveloppe de la courbe (son pourtour) «multipliée» par le cercle, ce qui donne un volume délimité par un tore. L'analogie entre courbes et nœuds est telle que pour dénouer le nœud, il nous faut rester à l'intérieur de ce tore. Ainsi, bien que les deux nœuds de la figure soient dénouables dans l'espace tout entier, ils sont indénuables à l'intérieur du tore.

Ce lien entre courbes et nœuds ne fut pas aussi fructueux que V. Arnold l'escomptait, aussi dût-il explorer des voies inédites. Selon lui, malgré les apparences, l'univers des courbes planes est plus complexe que celui des nœuds dans l'espace.

CAS DU CERCLE

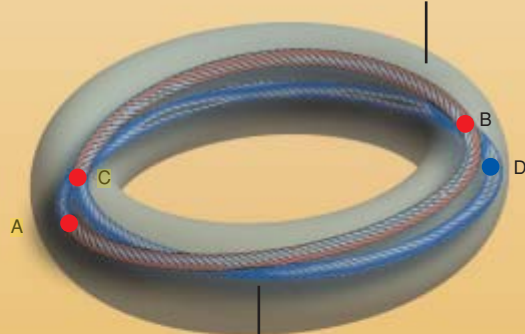


CAS D'UNE COURBE À UN POINT DOUBLE



(pour la clarté, seule une partie du nœud correspondant à la courbe a été représentée)

TORE DANS LEQUEL S'ENROULE LE NŒUD



NŒUDS CORRESPONDANT AUX COURBES

