

7. Les courbes : le nœud de l'affaire

V. Arnold est parvenu à ses résultats sur les courbes par le biais de la théorie des nœuds. Les nœuds sont le pendant à trois dimensions des courbes : des cordes repliées sur elles-mêmes et qui sont nouées par endroits. V. Arnold pensait trouver dans la théorie des nœuds – où l'on cherche aussi à classer les nœuds en catégories – une source d'inspiration pour trouver de nouveaux invariants des courbes. Le lien théorique qu'il voulait établir entre ces deux types d'objets mathématiques provient d'une méthode précédemment découverte consistant à construire un nœud à partir d'une courbe plane. La méthode est peu intuitive : si l'on se contentait de «déplier» à trois dimensions la courbe plane, on obtiendrait une courbe non nouée. Cette méthode consiste à placer sur la troisième direction de l'espace (en plus des deux de la courbe), un axe gradué en degrés. Ensuite, on déplace la courbe le long de cet axe, et l'on marque les points de la courbe dont la tangente par rapport à l'horizontale est égale à la valeur de l'axe où l'on se trouve.

Prenons l'exemple présenté ci-dessous du cercle. Partons du point A, situé en bas du cercle. Puisque la tangente y est nulle, nous plaçons la courbe à la valeur 0° sur l'axe des tangentes et marquons d'un point rouge le point A. C'est le premier point du nœud. Ensuite, parcourons le cercle dans le sens trigonométrique : la tangente s'incline, si bien que nous devons avancer en même temps la courbe le long de l'axe des tangentes. Nous traçons ainsi les points rouges situés à droite de A sur la figure. Quand nous sommes au point B du cercle, la tangente est verticale, puis au point C, elle vaut 180° . Comme une tangente n'est pas

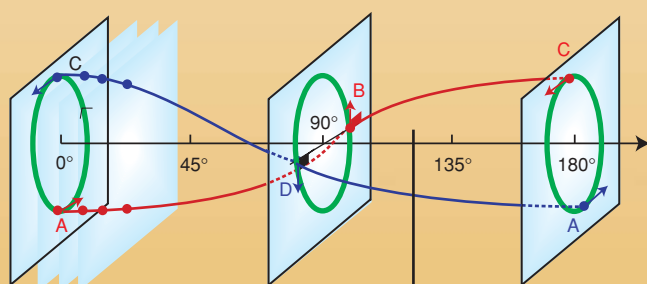
une droite orientée, 180° et 0° sont équivalents. Nous repartons donc à 0° pour recommencer l'opération le long de l'axe et continuer le tracé du nœud (courbe bleue). Ce dessin de la partie bleue nous fait revenir au point A. Pour obtenir le nœud, il nous reste à refermer l'axe des angles sur lui-même afin de superposer 0° et 180° : les différentes parties de la courbe se rejoignent et forment un nœud continu. En suivant ce procédé, un cercle donne une corde à deux boucles.

Le second exemple de nœud, dessiné à partir d'une courbe à un point double, a été tracé avec l'axe des angles déjà replié sur lui-même. Comme pour le cercle, les points A, B et C sont les points de la courbe dont la tangente est respectivement inclinée de 0° , 90° et 180° .

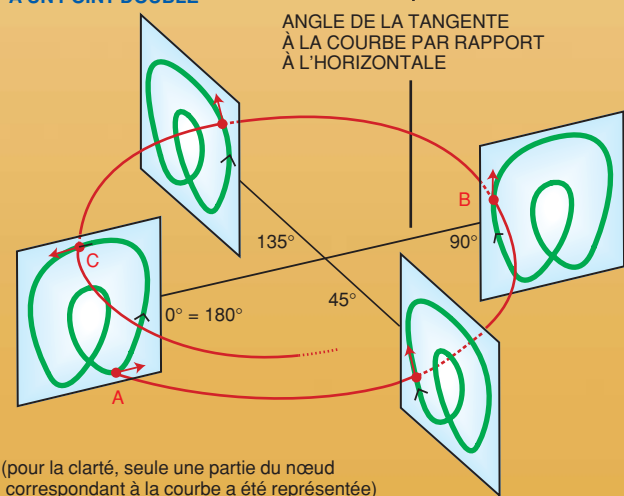
Nous pouvons préciser le volume de l'espace dans lequel les nœuds ainsi conçus se retrouvent. Puisqu'en définitive nous avons fait évoluer la courbe le long d'un cercle, le nœud est contenu dans l'enveloppe de la courbe (son pourtour) «multipliée» par le cercle, ce qui donne un volume délimité par un tore. L'analogie entre courbes et nœuds est telle que pour dénouer le nœud, il nous faut rester à l'intérieur de ce tore. Ainsi, bien que les deux nœuds de la figure soient dénouables dans l'espace tout entier, ils sont indénuables à l'intérieur du tore.

Ce lien entre courbes et nœuds ne fut pas aussi fructueux que V. Arnold l'escomptait, aussi dût-il explorer des voies inédites. Selon lui, malgré les apparences, l'univers des courbes planes est plus complexe que celui des nœuds dans l'espace.

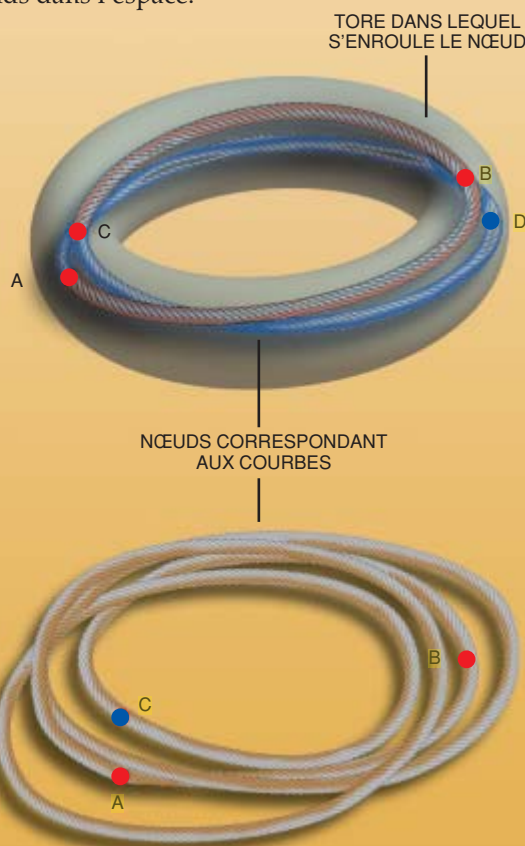
CAS DU CERCLE



CAS D'UNE COURBE À UN POINT DOUBLE



(pour la clarté, seule une partie du nœud correspondant à la courbe a été représentée)



$R = 1$															
	St	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	4
	J^+	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-8
	J^-	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-9	-6	-6	-6	-6	-6	-12
	St	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
	J^+	2	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-4	-4	-6
	J^-	-2	-2	-2	-4	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-8	-8	-10
	St	0	0	0	0	1	1	1	St	-2	1	1	1	2	2
	J^+	2	2	2	2	0	0	0	J^+	4	-2	-2	-2	-4	-4
	J^-	-2	-2	-2	-2	-4	-4	-4	J^-	0	-6	-6	-6	-8	-8
$R = 3$															
	St	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	6
	J^+	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-12
	J^-	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-16
	St	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5
	J^+	-2	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10
	J^-	-6	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-12	-12	-12	-14	-14	-14	-14
	St	2	3	3	St	0	3	4	4	St	2	2	2	2	2
	J^+	-2	-4	-4	J^+	0	-6	-8	-8	J^+	-4	-4	-4	-4	-4
	J^-	-6	-8	-8	J^-	-4	-10	-12	-12	J^-	-8	-8	-8	-8	-8
$R = 5$															
	St	6	7	10	St	5	6	8	9	St	4	7	7	7	7
	J^+	-12	-14	-20	J^+	-10	-12	-16	-18	J^+	-8	-14	-14	-14	-14
	J^-	-16	-18	-24	J^-	-14	-16	-20	-22	J^-	-12	-18	-18	-18	-18

8. ENSEMBLE DES COURBES à quatre points doubles. On a indiqué leur nombre de rotation R , leur diagramme de Gauss (en mar-
ron), leur étrangeté St , et leurs deux autres invariants J^+ et J^- . Pour toutes les courbes, $J^+ - J^- = N$. Pour les courbes minimales, on a de surcroît $J^+ = -2 St$.

et trois pour la courbe :



Nous savons que cette construction ne concerne que les courbes minimales. Le diagramme de Gauss d'une courbe non minimale existe, mais on ne peut lui associer un arbre.

Le sens de l'étrangeté

La définition de l'étrangeté est relativement simple, mais en est-il autant de sa signification? Celle des deux premiers invariants était claire : le nombre de points doubles correspond à peu près au nombre de boucles de la courbe, tandis que le nombre de rotation exprime combien de fois on tourne sur soi-même en suivant la courbe. Quel sens attribuer à l'étrangeté? Rappelons que Whitney avait montré que deux courbes ayant même nombre de rotation se déduisent l'une de l'autre par une déformation où, à chaque instant de la déformation, la courbe n'a ni angle ni point de rebroussement. Cependant, dans le cas où les courbes n'ont pas la même forme, on rencontrera nécessairement des courbes intermédiaires ayant au moins l'une des intersections atypiques suivantes : des points triples, des points quadruples... des points doubles d'autotangence, des points triples d'auto tangence... Par exemple, pour faire disparaître une boucle, on passe nécessairement par une figure qui comporte un point d'autotangence (voir la figure 2b).

En fait, Whitney a démontré que l'on peut choisir la déformation de façon à ne rencontrer que des courbes ayant comme singularités au plus des points triples et des points d'autotangence, courbes nommées sous-stables. Par exemple, pour passer la boucle rouge de la courbe suivante :



par-dessus la première boucle, nul besoin de faire coïncider les deux points doubles en un point quadruple : on a toujours la possibilité de passer un seul brin de courbe à la fois par-dessus un point double (auquel cas le point

double se transforme en point triple) :



V. Arnold a montré que lorsqu'une courbe se déforme en une autre, le nombre minimum de points triples par lesquels elle passe est égal à la différence des étrangetés des deux courbes (en valeur absolue).

Deux autres invariants définis par V. Arnold ont une signification dans le contexte des transformations. Il s'agit de deux nombres, J^+ et J^- , qui se calculent à partir du nombre de points doubles positifs et négatifs, et du nombre de rotation de sous-parties de la courbe. La moitié de la différence des J^+ de deux courbes donne le nombre minimum de points d'autotangence positive :



par lesquels on doit passer pour transformer l'une dans l'autre. La moitié de la différence des J^- procure, elle, le nombre minimum de points d'autotangence négative :



Ces relations sont vraies pour toutes les courbes (qu'elles soient minimales ou non), mais dans le cas des courbes minimales, V. Arnold a mis en évidence que l'information contenue dans J^+ et J^- est redondante avec l'étrangeté. J^+ est alors simplement l'opposé de deux fois l'étrangeté.

Références incomplètes

Ni l'étrangeté ni J^+ ni J^- ne suffisent à classer complètement les courbes. Ces caractéristiques sont identiques pour les courbes :



Ces courbes possèdent quatre points doubles, représentent chacune trois tours de rotation, et leur étrangeté vaut quatre (voir la figure 8), mais la

forme de ces figures diffère. L'étrangeté est de moins en moins suffisante à mesure que le nombre N croît : tandis que le nombre de classes de courbes croît exponentiellement avec N (voir la figure 5), l'étrangeté, elle, ne varie que de N à $N(N+1)/2$.

Pour le quincaillier, les informations concernant les vis – leur taille, leur diamètre et le type de leur tête – suffisaient à les ranger. Pour les mathématiciens, la situation idéale, quand on peut y arriver, est semblable à celle du quincaillier : l'ensemble d'invariants est alors « caractéristique », c'est-à-dire que la connaissance de la totalité de ces invariants fournit exactement la classe désirée, ici la forme de la courbe (dans la limite où le nombre de courbes n'est pas infini, sinon le problème serait intraitable). Trouvera-t-on d'autres invariants qui compléteront ceux de Whitney et de V. Arnold?

Le lecteur pourra légitimement demander pourquoi aucun travail important n'est paru sur les courbes planes entre Whitney et V. Arnold. Risquons quelques opinions personnelles. Comme l'a dit Mikhael Gromov, les mathématiciens s'intéressent à un problème par curiosité, par intérêt personnel, et enfin, par effet de mode. Parmi ces problèmes, seul l'avenir dit quels sont ceux qui font progresser les structures essentielles des mathématiques. Pour les courbes, l'effet de mode était inexistant, et il semblait difficile de faire une œuvre vraiment nouvelle en travaillant sur les courbes planes. Autre raison : il fallait une idée nouvelle pour progresser après Whitney, qui ne pouvait peut-être germer que dans un environnement mathématique mûr pour ce problème. Enfin la curiosité était notable pour V. Arnold : V. Arnold s'est toujours intéressé aux mathématiques « visibles » – ce qui ne veut pas dire qu'il ne sait pas manier les concepts les plus abstraits quand ils lui sont utiles.

Marcel BERGER est mathématicien. Il a dirigé l'IHES, l'Institut des hautes études scientifiques.

H. WHITNEY, *On regular closed curves in the plane*, in *Compositio math.*, 4: 276-284, 1937.

M. BERGER et B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Puf, 1987.

V. ARNOLD, *Vassiliev theory of discriminants and knots*, First european congress of math., Paris, 1992.

V. ARNOLD, *Topological invariants of plane curves and caustics*, American mathematical society, 1994.

La science des noeuds, Belin – PLS, 2002.

M. BERGER, *La géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, Cassini, à paraître.