

8. ENSEMBLE DES COURBES à quatre points doubles. On a indiqué leur nombre de rotation R , leur diagramme de Gauss (en mar-
ron), leur étrangeté St , et leurs deux autres
invariants J^+ et J^- . Pour toutes les courbes,
 $J^+ - J^- = N$. Pour les courbes minimales, on a
de surcroît $J^+ = -2 St$.

et trois pour la courbe :



Nous savons que cette construction ne concerne que les courbes minimales. Le diagramme de Gauss d'une courbe non minimale existe, mais on ne peut lui associer un arbre.

Le sens de l'étrangeté

La définition de l'étrangeté est relativement simple, mais en est-il autant de sa signification? Celle des deux premiers invariants était claire : le nombre de points doubles correspond à peu près au nombre de boucles de la courbe, tandis que le nombre de rotation exprime combien de fois on tourne sur soi-même en suivant la courbe. Quel sens attribuer à l'étrangeté? Rappelons que Whitney avait montré que deux courbes ayant même nombre de rotation se déduisent l'une de l'autre par une déformation où, à chaque instant de la déformation, la courbe n'a ni angle ni point de rebroussement. Cependant, dans le cas où les courbes n'ont pas la même forme, on rencontrera nécessairement des courbes intermédiaires ayant au moins l'une des intersections atypiques suivantes : des points triples, des points quadruples... des points doubles d'autotangence, des points triples d'auto tangence... Par exemple, pour faire disparaître une boucle, on passe nécessairement par une figure qui comporte un point d'autotangence (voir la figure 2b).

En fait, Whitney a démontré que l'on peut choisir la déformation de façon à ne rencontrer que des courbes ayant comme singularités au plus des points triples et des points d'autotangence, courbes nommées sous-stables. Par exemple, pour passer la boucle rouge de la courbe suivante :



par-dessus la première boucle, nul besoin de faire coïncider les deux points doubles en un point quadruple : on a toujours la possibilité de passer un seul brin de courbe à la fois par-dessus un point double (auquel cas le point

double se transforme en point triple) :



V. Arnold a montré que lorsqu'une courbe se déforme en une autre, le nombre minimum de points triples par lesquels elle passe est égal à la différence des étrangetés des deux courbes (en valeur absolue).

Deux autres invariants définis par V. Arnold ont une signification dans le contexte des transformations. Il s'agit de deux nombres, J^+ et J^- , qui se calculent à partir du nombre de points doubles positifs et négatifs, et du nombre de rotation de sous-parties de la courbe. La moitié de la différence des J^+ de deux courbes donne le nombre minimum de points d'autotangence positive :



par lesquels on doit passer pour transformer l'une dans l'autre. La moitié de la différence des J^- procure, elle, le nombre minimum de points d'autotangence négative :



Ces relations sont vraies pour toutes les courbes (qu'elles soient minimales ou non), mais dans le cas des courbes minimales, V. Arnold a mis en évidence que l'information contenue dans J^+ et J^- est redondante avec l'étrangeté. J^+ est alors simplement l'opposé de deux fois l'étrangeté.

Références incomplètes

Ni l'étrangeté ni J^+ ni J^- ne suffisent à classer complètement les courbes. Ces caractéristiques sont identiques pour les courbes :



Ces courbes possèdent quatre points doubles, représentent chacune trois tours de rotation, et leur étrangeté vaut quatre (voir la figure 8), mais la

forme de ces figures diffère. L'étrangeté est de moins en moins suffisante à mesure que le nombre N croît : tandis que le nombre de classes de courbes croît exponentiellement avec N (voir la figure 5), l'étrangeté, elle, ne varie que de N à $N(N+1)/2$.

Pour le quincaillier, les informations concernant les vis – leur taille, leur diamètre et le type de leur tête – suffisaient à les ranger. Pour les mathématiciens, la situation idéale, quand on peut y arriver, est semblable à celle du quincaillier : l'ensemble d'invariants est alors « caractéristique », c'est-à-dire que la connaissance de la totalité de ces invariants fournit exactement la classe désirée, ici la forme de la courbe (dans la limite où le nombre de courbes n'est pas infini, sinon le problème serait intraitable). Trouvera-t-on d'autres invariants qui compléteront ceux de Whitney et de V. Arnold?

Le lecteur pourra légitimement demander pourquoi aucun travail important n'est paru sur les courbes planes entre Whitney et V. Arnold. Risquons quelques opinions personnelles. Comme l'a dit Mikhael Gromov, les mathématiciens s'intéressent à un problème par curiosité, par intérêt personnel, et enfin, par effet de mode. Parmi ces problèmes, seul l'avenir dit quels sont ceux qui font progresser les structures essentielles des mathématiques. Pour les courbes, l'effet de mode était inexistant, et il semblait difficile de faire une œuvre vraiment nouvelle en travaillant sur les courbes planes. Autre raison : il fallait une idée nouvelle pour progresser après Whitney, qui ne pouvait peut-être germer que dans un environnement mathématique mûr pour ce problème. Enfin la curiosité était notable pour V. Arnold : V. Arnold s'est toujours intéressé aux mathématiques « visibles » – ce qui ne veut pas dire qu'il ne sait pas manier les concepts les plus abstraits quand ils lui sont utiles.

Marcel BERGER est mathématicien. Il a dirigé l'IHES, l'Institut des hautes études scientifiques.

H. WHITNEY, *On regular closed curves in the plane*, in *Compositio math.*, 4: 276-284, 1937.

M. BERGER et B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Puf, 1987.

V. ARNOLD, *Vassiliev theory of discriminants and knots*, First european congress of math., Paris, 1992.

V. ARNOLD, *Topological invariants of plane curves and caustics*, American mathematical society, 1994.

La science des noeuds, Belin – PLS, 2002.

M. BERGER, *La géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, Cassini, à paraître.

Les mammifères à



1. CET ANCÊTRE DE LA BALEINE, *Rodhocetus* (au premier plan à gauche et à droite), qui vivait il y a environ 48 millions d'années, quelque part dans ce qui est aujourd'hui le Pakistan, se nourrissait de poissons, tandis qu'*Ambulocetus* mangeait de petits mammifères terrestres (à l'arrière plan).

la conquête des mers

KATE WONG

L'étude de nouveaux fossiles et des analyses d'ADN ont éclairé l'origine des baleines : elles descendent des mammifères terrestres, probablement de l'ancêtre de l'hippopotame.



Un jeune *Eotitanops*, qui ressemble à un tapir, s'approche de l'eau pour s'abreuver. Embusquée dans la mangrove, une bête observe la scène et salive : l'*Eotitanops* est un mets de choix. Propulsée par ses puissants membres postérieurs, elle se jette sur l'animal, enfonce ses crocs dans sa proie, puis la traîne dans l'eau. Combat inégal. Victorieuse, la bête regagne la rive pour y dévorer son festin. À première vue, ce prédateur ressemble à un crocodile : les mêmes pattes recroquevillées, la queue puissante, un long museau et des yeux vissés sur le haut du crâne. Pourtant, de plus près, sa peau n'est pas faite de cuir épais, mais recouverte de fourrure ; il n'a pas de griffes, mais des doigts, et ses dents à plusieurs pointes en font un mammifère et non un reptile. Cette créature – *Ambulocetus* – est une baleine primitive, l'un des chaînons qui relient les ancêtres des cétacés aux quelque 80 espèces de baleines, de dauphins et autres marsouins qui peuplent aujourd'hui les océans.

Les biologistes de l'évolution ont longtemps considéré l'apparition des baleines comme une énigme. Les cétacés actuels sont dépourvus de membres et incapables de vivre hors de l'eau : quels liens peuvent-ils avoir avec les mammifères ? En 1851, Herman Melville a même assimilé Moby Dick et ses congénères à des poissons ! Pourtant, les naturalistes du XIX^e siècle, et, avec eux, Charles Darwin, considéraient ces animaux au sang chaud qui allaitent leurs petits et respirent de l'air, comme des mammifères. Or, les ancêtres des mammifères étaient terrestres, de sorte que ceux des baleines devaient l'être également.

Dans son ouvrage *De l'origine des espèces*, Darwin notait qu'un ours nageant le museau hors de l'eau pour attraper des insectes aurait pu être une «idée évolutive» précédant l'apparition des baleines. La suggestion ne suscita que railleries, au point que Darwin supprima le passage dans les éditions ultérieures en se contentant de noter qu'un ours était «presque comme» une baleine.

Dans les décennies qui suivirent, ni l'étude des fossiles disponibles – incomplets ou trop tardifs – ni celle de l'anatomie des cétacés contemporains ne renseignèrent les biologistes sur l'origine des baleines. Ainsi, en 1945, dans sa classification des mammifères, le paléontologue George Simpson écrivait que la baleine a évolué dans l'océan il y a si longtemps qu'aucune trace de ses ancêtres n'a été conservée. Toutefois, durant ces 20 dernières années, des progrès considérables ont été réalisés et l'énigme est aujourd'hui partiellement résolue. Après avoir analysé des fossiles de baleines datant de l'Éocène (entre -55 et -34 millions d'années), les paléontologues pensent que les ancêtres terrestres des cétacés auraient gagné la mer durant cette période. Ils ont également découvert que les baleines à fanons ont certainement divergé des cétacés à dents durant la période suivante, l'Oligocène, et ont déduit des données fossiles et de l'étude de l'ADN des cétacés vivants, où, quand et comment les cétacés ont évolué à partir de leurs ancêtres terrestres.

Le premier indice sur l'origine des baleines fut acquis grâce à une méthode mise au point vers 1945. Alors que Simpson classait les mammifères contemporains sur des critères purement anatomiques, la nouvelle méthode consistait à comparer des animaux vivants d'après les anticorps qu'ils produisaient

en réaction à certains antigènes. Alan Boyden et ses collègues de l'Université de Rutgers appliquèrent cette technique aux mammifères, et montrèrent que les cétacés sont proches (par leurs anticorps) des mammifères à nombre pair d'orteils, ou artiodactyles, un groupe auxquels appartiennent les chameaux, les hippopotames, les cochons et les ruminants. Les baleines étaient-elles elles-mêmes des artiodactyles ? Formaient-elles une branche évolutive distincte ayant un ancêtre commun avec les artiodactyles ?

Dans les années 1960, une étude des mammifères primitifs à sabots, les condylarthes, n'ayant pas encore acquis certaines caractéristiques des artiodactyles ou d'autres ordres de mammifères fit pencher la balance en faveur de la seconde hypothèse. Leigh Van Valen, alors au Muséum d'histoire naturelle de New York, découvrit des ressemblances étonnantes entre les dents à trois pointes des quelques fossiles de baleines et celles d'un sous-groupe de condylarthes carnivore, les mésonychidés. Il trouva également des analogies entre les artiodactyles et un autre groupe de condylarthes, les arctocyonidés, proches des mésonychidés. L. Van Valen en conclut que les baleines descendent des mésonychidés et qu'elles sont liées aux artiodactyles par leur ancêtre commun, les condylarthes.

Les baleines marcheuses

Une décennie s'écoula avant qu'on ne découvre de nouveaux fossiles de baleines suffisamment proches du point de divergence, pour que l'on puisse tester l'hypothèse de L. Van Valen. En 1977, le paléontologue Philip Gingerich, de l'Université du Michigan, recherchait au Pakistan des traces de mammifères terrestres de l'Éocène dans une région où l'on en avait déjà découvertes. L'expédition était décevante : la zone ne contenait que des fossiles marins. Il n'est pas étonnant de trouver des fossiles marins au Pakistan, si loin des côtes actuelles, car, durant l'Éocène, une vaste mer, la Téthys, recouvrait régulièrement ce qui est aujourd'hui le sous-continent indien. Toutefois, parmi ces anciens poissons et des coquillages, l'équipe de paléontologues découvrit deux fragments de bassin qui semblaient provenir d'un grand animal capable de marcher. Ph. Gingerich et ses collègues s'amuserent à imaginer une «baleine marcheuse», mais sans y croire tant l'idée leur paraissait saugrenue. Ils rentrèrent dans leur laboratoire, persuadés que la plus belle pièce ramenée était une mâchoire d'artiodactyle primitif, trouvée sur un autre site.

Deux ans plus tard, dans le Nord du Pakistan, aux pieds de l'Himalaya, l'équipe de Ph. Gingerich mit au jour, parmi des restes de mammifères vieux de 50 millions d'années, un autre fossile de baleine : un fragment de crâne d'une créature de la taille d'un loup pourvu de quelques caractéristiques des cétacés (notamment en ce qui concerne l'anatomie



Portia Sloan et Edward Bell