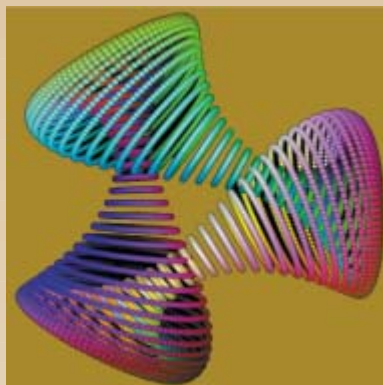




Le monde mathématique existe-t-il?

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'existence du monde des objets mathématiques est une question à la fois fondamentale et sans importance. Voyons pourquoi.

Les mathématiques sont une discipline à part : elles traitent d'objets (les nombres, les figures géométriques, les fonctions, les espaces de dimension finie ou infinie, etc.) dont l'existence est controversée. Cela étant, les mathématiciens s'interrogent-ils sur l'existence du monde mathématique? Non. La question – non résolue – n'est jamais abordée dans les revues mathématiques. Certains logiciens en traitent indirectement, car leurs résultats donnent lieu à des interprétations qui favorisent l'existence ou la non-existence des êtres mathématiques. Pourtant les logiciens eux-mêmes choisissent souvent une position qui rend indifférente l'existence (ou l'inexistence) du monde des objets mathématiques. Le «désengagement-ontologique» est général.

PARLER DE RIEN?

En privé, de rares mathématiciens expriment leur sentiment sur la question... en précisant prudemment qu'il s'agit d'un problème philosophique et non scientifique. N'est-ce pas étrange? Un biologiste ne considère pas que l'existence des licornes ou des prions est du ressort des philosophes : son travail est de déterminer cette existence et, s'il n'en est pas capable, il perfectionnera ses outils jusqu'à réussir. Un physicien ne considère pas que la question de l'existence de l'éther (substance hypothétique qu'on pensait le substrat des vibrations des ondes électromagnétiques avant la théorie de la relativité) ou l'existence du proton est une questions échappant à sa compétence. Même si la

mécanique quantique a rendu délicat le traitement de certaines notions, nul physicien ne se défait en laissant aux philosophes le soin de résoudre les questions ontologiques, et aujourd'hui, pour tout physicien, les protons existent et l'éther n'existe pas.

Comment les mathématiciens peuvent-ils refuser de se prononcer sur l'existence du monde des objets abstraits qu'ils passent leur vie à étudier? Récemment le philosophe Mark Balaguer dans son livre *Platonism and anti-Platonism in Mathematics* a éclairé la situation, donnant raison aux mathématiciens : leur méfiance naturelle pour les questions ontologiques est confortée par l'analyse nouvelle qu'il propose et qui dans une démonstration minutieuse de 150 pages renvoie dos à dos ceux qui croient à un monde des êtres mathématiques et ceux qui n'y croient pas. Un philosophe des mathématiques pour la première fois défend donc une vue conforme à l'agnosticisme des mathématiciens. Le cheminement emprunté par M. Balaguer se déroule en plusieurs étapes que nous allons suivre.

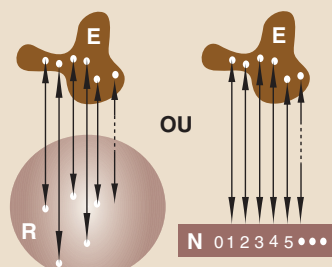
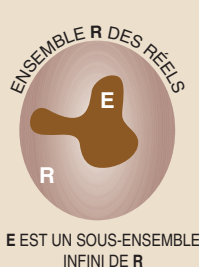
Les philosophes qui croient que les êtres mathématiques existent réellement se nomment les platoniciens en l'honneur du philosophe grec Platon (427-347 avant J.-C.). Selon celui-ci, le monde des idées (et donc celui des objets mathématiques) détermine l'univers des choses terrestres qui n'en est que son pâle reflet (comme dans le fameux mythe de la caverne de Socrate dont les habitants ne voient que l'ombre des choses). Aujourd'hui on nomme platonisme toute philosophie des mathématiques selon laquelle il existe un monde des objets mathématiques indépendant de l'esprit humain. Pour un platonicien :

1. L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LE PLATONISME GÖDELIEN

L'hypothèse du continu est l'affirmation que tout ensemble infini contenu dans l'ensemble des nombres réels peut être mis en correspondance terme à terme, soit avec l'ensemble des nombres entiers, soit avec l'ensemble des nombres réels (autrement dit : il n'y a pas d'infini intermédiaire entre celui des entiers et celui des réels).

Pour un platonicien de type gödelien, le monde mathématique est celui des ensembles et dans ce monde la vérité de l'hypothèse du continu est déterminée : ou bien l'hypothèse du continu est vraie ou bien l'hypothèse du continu est fausse. Le travail du mathématicien consiste à découvrir ce qu'il en est.

Pour le platonisme plein [proposé par M. Balaguer], le monde des êtres mathématiques contient à la fois des sous-mondes où l'hypo-



thèse du continu est vraie et des sous-mondes où l'hypothèse du continu est fausse ; aucun n'est plus vrai que l'autre. Le mathématicien ne découvrira pas que l'hypothèse du continu est vraie ou fausse, car l'hypothèse du continu n'est pas déterminée.

Pour le platonisme de type gödelien, si «le monde vrai des ensembles» vérifie l'hypothèse du continu, alors il contient des structures corres-

pondant à des univers où l'hypothèse du continu est fausse (et inversement). Cela résulte des travaux des logiciens de la théorie des modèles dont Gödel fut l'un des promoteurs. Cependant ces structures sont, de son point de vue, artificielles et «le monde vrai des ensembles» satisfait l'hypothèse du continu ou ne la satisfait pas. En dépit du prestige de K. Gödel, peu de mathématiciens le suivent aujourd'hui.