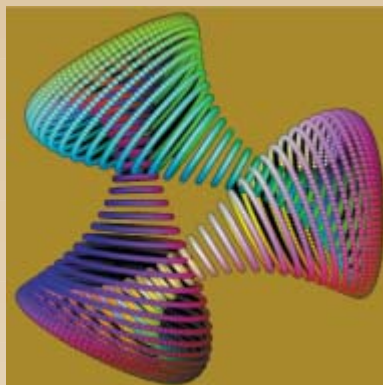




Le monde mathématique existe-t-il?

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'existence du monde des objets mathématiques est une question à la fois fondamentale et sans importance. Voyons pourquoi.

Les mathématiques sont une discipline à part : elles traitent d'objets (les nombres, les figures géométriques, les fonctions, les espaces de dimension finie ou infinie, etc.) dont l'existence est controversée. Cela étant, les mathématiciens s'interrogent-ils sur l'existence du monde mathématique? Non. La question – non résolue – n'est jamais abordée dans les revues mathématiques. Certains logiciens en traitent indirectement, car leurs résultats donnent lieu à des interprétations qui favorisent l'existence ou la non-existence des êtres mathématiques. Pourtant les logiciens eux-mêmes choisissent souvent une position qui rend indifférente l'existence (ou l'inexistence) du monde des objets mathématiques. Le «désengagement-ontologique» est général.

PARLER DE RIEN?

En privé, de rares mathématiciens expriment leur sentiment sur la question... en précisant prudemment qu'il s'agit d'un problème philosophique et non scientifique. N'est-ce pas étrange? Un biologiste ne considère pas que l'existence des licornes ou des prions est du ressort des philosophes : son travail est de déterminer cette existence et, s'il n'en est pas capable, il perfectionnera ses outils jusqu'à réussir. Un physicien ne considère pas que la question de l'existence de l'éther (substance hypothétique qu'on pensait le substrat des vibrations des ondes électromagnétiques avant la théorie de la relativité) ou l'existence du proton est une questions échappant à sa compétence. Même si la

mécanique quantique a rendu délicat le traitement de certaines notions, nul physicien ne se défait en laissant aux philosophes le soin de résoudre les questions ontologiques, et aujourd'hui, pour tout physicien, les protons existent et l'éther n'existe pas.

Comment les mathématiciens peuvent-ils refuser de se prononcer sur l'existence du monde des objets abstraits qu'ils passent leur vie à étudier? Récemment le philosophe Mark Balaguer dans son livre *Platonism and anti-Platonism in Mathematics* a éclairé la situation, donnant raison aux mathématiciens : leur méfiance naturelle pour les questions ontologiques est confortée par l'analyse nouvelle qu'il propose et qui dans une démonstration minutieuse de 150 pages renvoie dos à dos ceux qui croient à un monde des êtres mathématiques et ceux qui n'y croient pas. Un philosophe des mathématiques pour la première fois défend donc une vue conforme à l'agnosticisme des mathématiciens. Le cheminement emprunté par M. Balaguer se déroule en plusieurs étapes que nous allons suivre.

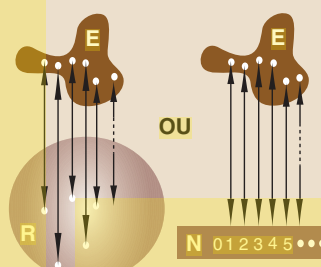
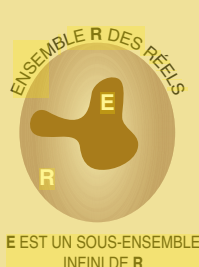
Les philosophes qui croient que les êtres mathématiques existent réellement se nomment les platoniciens en l'honneur du philosophe grec Platon (427-347 avant J.-C.). Selon celui-ci, le monde des idées (et donc celui des objets mathématiques) détermine l'univers des choses terrestres qui n'en est que son pâle reflet (comme dans le fameux mythe de la caverne de Socrate dont les habitants ne voient que l'ombre des choses). Aujourd'hui on nomme platonisme toute philosophie des mathématiques selon laquelle il existe un monde des objets mathématiques indépendant de l'esprit humain. Pour un platonicien :

1. L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LE PLATONISME GÖDELIEN

L'hypothèse du continu est l'affirmation que tout ensemble infini contenu dans l'ensemble des nombres réels peut être mis en correspondance terme à terme, soit avec l'ensemble des nombres entiers, soit avec l'ensemble des nombres réels (autrement dit : il n'y a pas d'infini intermédiaire entre celui des entiers et celui des réels).

Pour un platonicien de type gödelien, le monde mathématique est celui des ensembles et dans ce monde la vérité de l'hypothèse du continu est déterminée : ou bien l'hypothèse du continu est vraie ou bien l'hypothèse du continu est fausse. Le travail du mathématicien consiste à découvrir ce qu'il en est.

Pour le platonisme plein [proposé par M. Balaguer], le monde des êtres mathématiques contient à la fois des sous-mondes où l'hypo-



thèse du continu est vraie et des sous-mondes où l'hypothèse du continu est fausse ; aucun n'est plus vrai que l'autre. Le mathématicien ne découvrira pas que l'hypothèse du continu est vraie ou fausse, car l'hypothèse du continu n'est pas déterminée.

Pour le platonisme de type gödelien, si «le monde vrai des ensembles» vérifie l'hypothèse du continu, alors il contient des structures corres-

pondant à des univers où l'hypothèse du continu est fausse (et inversement). Cela résulte des travaux des logiciens de la théorie des modèles dont Gödel fut l'un des promoteurs. Cependant ces structures sont, de son point de vue, artificielles et «le monde vrai des ensembles» satisfait l'hypothèse du continu ou ne la satisfait pas. En dépit du prestige de K. Gödel, peu de mathématiciens le suivent aujourd'hui.

(a) Il existe des objets mathématiques tels que les nombres et les ensembles et ces objets ne sont pas localisés dans l'espace et le temps du monde de la physique où nous vivons. Ces objets sont indépendants de nous et de la connaissance que nous en avons.

(b) Nos théories mathématiques décrivent ces objets et nous en fournissent une connaissance fiable. Les mathématiciens *découvrent* les théorèmes.

Pour l'antiplatonisme la situation est opposée :

(a') Il n'y a pas de monde des objets mathématiques.

(b') Nos théories mathématiques et notre capacité à les élaborer doivent être interprétées et expliquées sans référence à ce monde illusoire. Les mathématiciens *inventent* les théorèmes.

De nombreuses variantes du platonisme et de l'antiplatonisme mathématiques ont été défendues et un grand nombre d'arguments ont été échangés entre les partisans de ces deux positions métaphysiques fondamentales sur la nature des mathématiques. Pour M. Balaguer, il est possible de répondre à toutes les objections opposées au platonisme mathématique à la condition d'adopter «un platonisme plein», c'est-à-dire un platonisme maximal qui reconnaît l'existence de tous les objets mathématiques possibles, quelle qu'en soit la taille ou l'abstraction.

PLATONISMES LIMITÉS

Ce platonisme plein ne va pas de soi : si de nombreux mathématiciens et philosophes acceptent l'idée qu'il existe vraiment des nombres entiers, certains considèrent que les ensembles infinis n'existent pas (parfois des ensembles infinis spécifiques sont acceptés et pas d'autres). Pour justifier ces limites aux conceptions platoniciennes (qui s'opposent au platonisme plein de M. Balaguer), on invoque les difficultés et paradoxes rencontrés en théorie des ensembles.

L'impossibilité, par exemple, de régler proprement l'hypothèse du continu est troublante : elle affirme qu'aucun ensemble n'a une taille intermédiaire entre celle de l'ensemble des nombres entiers et celle de l'ensemble des nombres réels. La question est parfaitement claire, pourtant Kurt Gödel et Paul Cohen ont démontré que sa réponse ne dépend pas des autres axiomes de la théorie des ensembles et rien ne penche en faveur ou en défaveur de l'hypothèse du continu. Tout cela laisse croire que nous pouvons considérer que l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. Il est bien clair cependant que si les ensembles existent indépendamment de la connaissance que le mathématicien en a, c'est leur nature (et pas lui) qui décide de la vérité de l'hypothèse du continu.

Cette apparente liberté de choix concernant l'hypothèse du continu s'oppose donc à la croyance que les ensembles infinis sont réels. Les mathématiciens intuitionnistes, à la suite de L. Brouwer au début du XX^e siècle, regardent les objets infinis avec une méfiance particulière. Pour un intuitionniste, l'infini est un mirage et il faut refuser de dire que dans la suite des décimales du nombre π «ou bien il y a mille 7 consécutifs ou bien il n'y a jamais mille 7 consécutifs» : pour un intuitionniste, le tiers exclu (l'affirmation que A ou Non-A) ne s'applique pas aux propriétés de la suite infinie des décimales de π et plus généralement ne s'applique pas dès que l'on traite d'objets infinis.

Le grand logicien autrichien Kurt Gödel défendait une forme de platonisme fondée sur l'idée que les objets mathématiques sont les ensembles et que nous disposons d'un sens particulier, l'intuition mathématique, donnant accès à ce monde des ensembles. Cette conception conduisait Gödel à soutenir que les questions indécidées aujourd'hui le seront un jour : pour lui l'hypothèse du continu, par exemple, se résoudrait lorsque nous aurons perçu et formulé de nouveaux axiomes pertinents qui s'ajouteraient à ceux admis aujourd'hui en théorie des ensembles. M. Balaguer ne partage pas la conception de Gödel et son platonisme plein est l'affirmation sans restriction que tout objet mathématique, logiquement possible, existe. Puisque l'on peut ajouter, sans contradictions nouvelles, aux axiomes habituels de la théorie des ensembles, l'hypothèse du continu ou sa négation, les deux types de mondes ensemblistes coexistent dans un super-monde mathématique. Pour M. Balaguer, il n'y a pas à découvrir de vérité concernant l'hypothèse du continu comme le pensait Gödel (au platonisme limité), car le monde mathématique est aussi complet que possible.

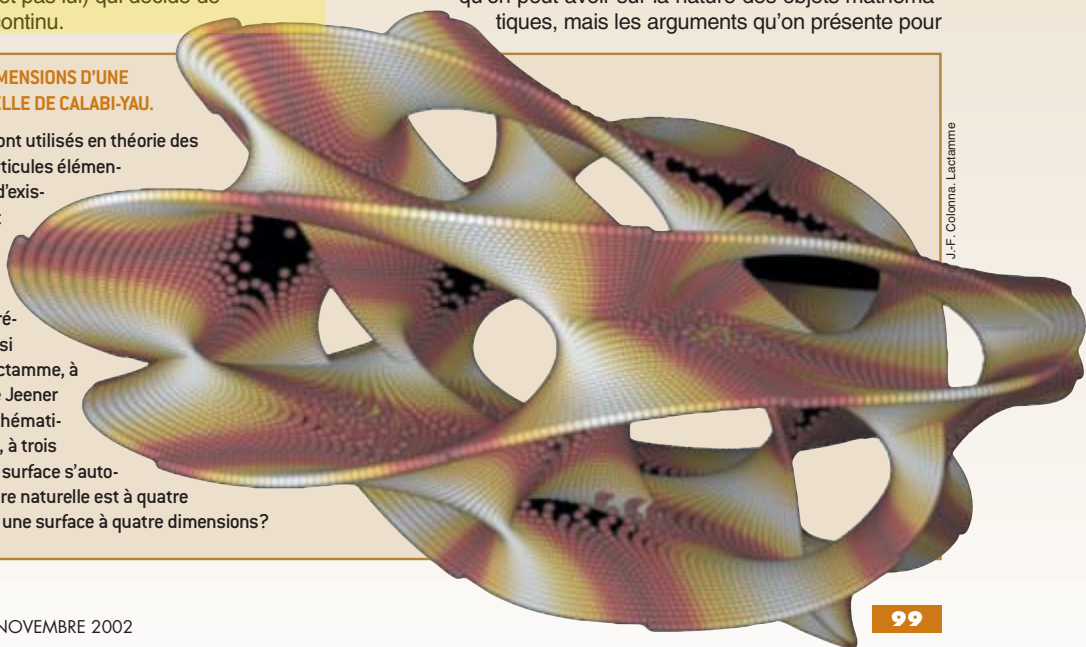
M. Balaguer n'est pas le premier à envisager une telle conception ontologique maximale. On en trouve par exemple déjà la trace chez Hilbert qui dans une lettre à Frege écrivait : «[quand] des axiomes arbitraires ne se contredisent pas les uns avec les autres et avec leurs conséquences, ils sont vrais et les choses définies par ces axiomes existent. C'est pour moi le critère de la vérité et de l'existence.»

Henri Poincaré, Michael Resnik et quelques autres ont aussi défendu des positions apparentées au platonisme plein de M. Balaguer, mais aucun n'en a tiré toutes les conséquences, et souvent, au contraire, leurs philosophies des mathématiques ont pris d'autres formes que celle du platonisme plein. La position de M. Balaguer est donc nouvelle.

M. Balaguer examine méticuleusement, non pas les opinions qu'on peut avoir sur la nature des objets mathématiques, mais les arguments qu'on présente pour

2. REPRÉSENTATION À TROIS DIMENSIONS D'UNE SURFACE QUADRIDIMENSIONNELLE DE CALABI-YAU.

De tels êtres mathématiques sont utilisés en théorie des cordes pour représenter les particules élémentaires ; ils posent un problème d'existence dans la mesure où il n'est actuellement pas envisageable de tester la validité des modèles fondés sur ces structures. La bouteille de Klein, représentée à côté du titre a été aussi calculée par J. F. Colonna au Lactamme, à partir d'une équation de Patrice Jeener (graveur de grand talent et mathématicien). Les deux structures sont, à trois dimensions, une immersion (la surface s'auto-traverse) alors que leur structure naturelle est à quatre dimensions ; mais qui peut voir une surface à quatre dimensions ?



J.-F. Colonna, Lactamme