

(a) Il existe des objets mathématiques tels que les nombres et les ensembles et ces objets ne sont pas localisés dans l'espace et le temps du monde de la physique où nous vivons. Ces objets sont indépendants de nous et de la connaissance que nous en avons.

(b) Nos théories mathématiques décrivent ces objets et nous en fournissent une connaissance fiable. Les mathématiciens *découvrent* les théorèmes.

Pour l'antiplatonisme la situation est opposée :

(a') Il n'y a pas de monde des objets mathématiques.

(b') Nos théories mathématiques et notre capacité à les élaborer doivent être interprétées et expliquées sans référence à ce monde illusoire. Les mathématiciens *inventent* les théorèmes.

De nombreuses variantes du platonisme et de l'antiplatonisme mathématiques ont été défendues et un grand nombre d'arguments ont été échangés entre les partisans de ces deux positions métaphysiques fondamentales sur la nature des mathématiques. Pour M. Balaguer, il est possible de répondre à toutes les objections opposées au platonisme mathématique à la condition d'adopter «un platonisme plein», c'est-à-dire un platonisme maximal qui reconnaît l'existence de tous les objets mathématiques possibles, quelle qu'en soit la taille ou l'abstraction.

PLATONISMES LIMITÉS

Ce platonisme plein ne va pas de soi : si de nombreux mathématiciens et philosophes acceptent l'idée qu'il existe vraiment des nombres entiers, certains considèrent que les ensembles infinis n'existent pas (parfois des ensembles infinis spécifiques sont acceptés et pas d'autres). Pour justifier ces limites aux conceptions platoniciennes (qui s'opposent au platonisme plein de M. Balaguer), on invoque les difficultés et paradoxes rencontrés en théorie des ensembles.

L'impossibilité, par exemple, de régler proprement l'hypothèse du continu est troublante : elle affirme qu'aucun ensemble n'a une taille intermédiaire entre celle de l'ensemble des nombres entiers et celle de l'ensemble des nombres réels. La question est parfaitement claire, pourtant Kurt Gödel et Paul Cohen ont démontré que sa réponse ne dépend pas des autres axiomes de la théorie des ensembles et rien ne penche en faveur ou en défaveur de l'hypothèse du continu. Tout cela laisse croire que nous pouvons considérer que l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. Il est bien clair cependant que si les ensembles existent indépendamment de la connaissance que le mathématicien en a, c'est leur nature (et pas lui) qui décide de la vérité de l'hypothèse du continu.

Cette apparente liberté de choix concernant l'hypothèse du continu s'oppose donc à la croyance que les ensembles infinis sont réels. Les mathématiciens intuitionnistes, à la suite de L. Brouwer au début du XX^e siècle, regardent les objets infinis avec une méfiance particulière. Pour un intuitionniste, l'infini est un mirage et il faut refuser de dire que dans la suite des décimales du nombre π «ou bien il y a mille 7 consécutifs ou bien il n'y a jamais mille 7 consécutifs» : pour un intuitionniste, le tiers exclu (l'affirmation que A ou Non-A) ne s'applique pas aux propriétés de la suite infinie des décimales de π et plus généralement ne s'applique pas dès que l'on traite d'objets infinis.

Le grand logicien autrichien Kurt Gödel défendait une forme de platonisme fondée sur l'idée que les objets mathématiques sont les ensembles et que nous disposons d'un sens particulier, l'intuition mathématique, donnant accès à ce monde des ensembles. Cette conception conduisait Gödel à soutenir que les questions indécidées aujourd'hui le seront un jour : pour lui l'hypothèse du continu, par exemple, se résoudrait lorsque nous aurons perçu et formulé de nouveaux axiomes pertinents qui s'ajouteraient à ceux admis aujourd'hui en théorie des ensembles. M. Balaguer ne partage pas la conception de Gödel et son platonisme plein est l'affirmation sans restriction que tout objet mathématique, logiquement possible, existe. Puisque l'on peut ajouter, sans contradictions nouvelles, aux axiomes habituels de la théorie des ensembles, l'hypothèse du continu ou sa négation, les deux types de mondes ensemblistes coexistent dans un super-monde mathématique. Pour M. Balaguer, il n'y a pas à découvrir de vérité concernant l'hypothèse du continu comme le pensait Gödel (au platonisme limité), car le monde mathématique est aussi complet que possible.

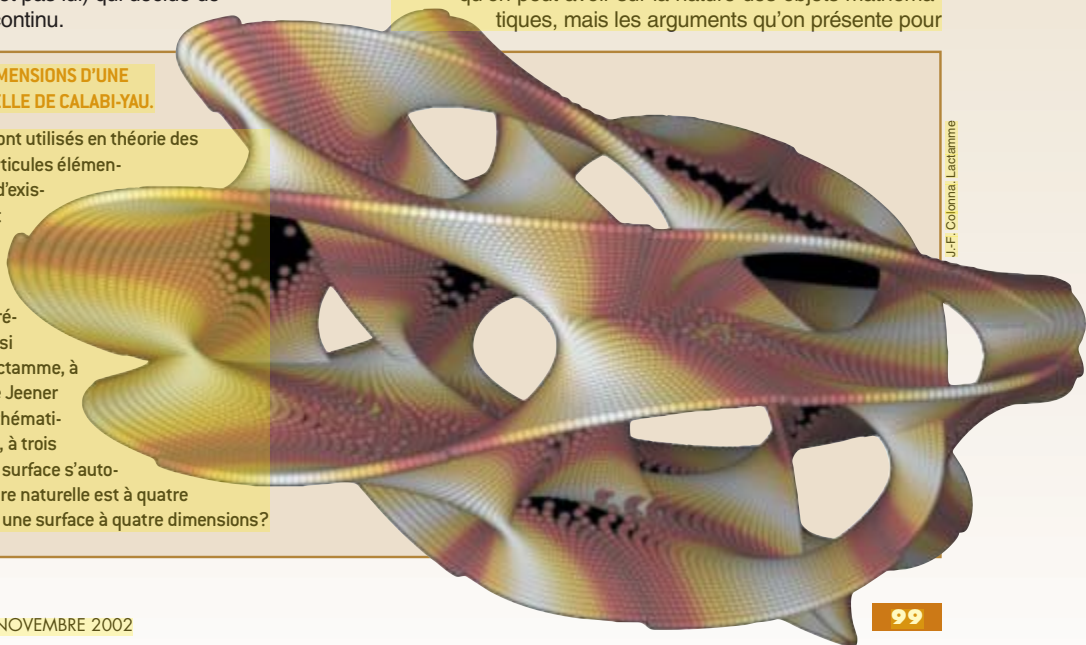
M. Balaguer n'est pas le premier à envisager une telle conception ontologique maximale. On en trouve par exemple déjà la trace chez Hilbert qui dans une lettre à Frege écrivait : «[quand] des axiomes arbitraires ne se contredisent pas les uns avec les autres et avec leurs conséquences, ils sont vrais et les choses définies par ces axiomes existent. C'est pour moi le critère de la vérité et de l'existence.»

Henri Poincaré, Michael Resnik et quelques autres ont aussi défendu des positions apparentées au platonisme plein de M. Balaguer, mais aucun n'en a tiré toutes les conséquences, et souvent, au contraire, leurs philosophies des mathématiques ont pris d'autres formes que celle du platonisme plein. La position de M. Balaguer est donc nouvelle.

M. Balaguer examine méticuleusement, non pas les opinions qu'on peut avoir sur la nature des objets mathématiques, mais les arguments qu'on présente pour

2. REPRÉSENTATION À TROIS DIMENSIONS D'UNE SURFACE QUADRIDIMENSIONNELLE DE CALABI-YAU.

De tels êtres mathématiques sont utilisés en théorie des cordes pour représenter les particules élémentaires ; ils posent un problème d'existence dans la mesure où il n'est actuellement pas envisageable de tester la validité des modèles fondés sur ces structures. La bouteille de Klein, représentée à côté du titre a été aussi calculée par J. F. Colonna au Lactamme, à partir d'une équation de Patrice Jeener (graveur de grand talent et mathématicien). Les deux structures sont, à trois dimensions, une immersion (la surface s'auto-traverse) alors que leur structure naturelle est à quatre dimensions ; mais qui peut voir une surface à quatre dimensions ?



J.-F. Colonna, Lactamme

3. LE PLATONISME PLEIN DE M. BALAGUER

Le platonisme «plein» de M. Balaguer est l'affirmation qu'à toute théorie logiquement consistante, correspondent des êtres mathématiques autrement dit : tous les êtres mathématiques possibles existent.

Le platonisme plein de M. Balaguer considère que notre capacité à faire des mathématiques est fondée sur notre capacité à maîtriser et à développer des théories consistantes et n'est pas liée à un improbable et mystérieux contact avec le monde des êtres mathématiques. Le platonisme plein explique que nous pouvons connaître de manière fiable les êtres mathématiques à l'aide de l'analogie du village népalais.

Un anthropologue, qui reste tout seul chez lui, et qui ne s'informe d'aucune façon sur les villages népalais, peut-il décrire des villages népalais sans se tromper ? Oui, si tous les villages népalais – c'est-à-dire conformes à une définition précise et fixée – existent, car alors l'anthropologue n'aura qu'à utiliser la définition des villages népalais et proposer des descriptions consistantes de tels villages : à chaque fois qu'il en élaborera une, un des villages du monde plein des villages népalais sera conforme à son récit.

D'après le platonisme plein de M. Balaguer, le mathématicien peut de la même façon en restant chez lui et sans avoir aucun contact mental ou autre avec les êtres mathématiques les décrire et faire avancer leur connaissance. La connaissance du monde des êtres mathématiques est possible et sans mystère pour le platonisme plein.



défendre une vue ou une autre. Le platonisme de K. Gödel et la majorité des platonismes défendus jusqu'ici ne sont pas en mesure de répondre correctement aux deux objections qu'il place au cœur de son argumentaire : l'objection épistémologique et l'objection de la non-unicité.

L'OBJECTION ÉPISTÉMOLOGIQUE CONTRE LE PLATONISME

L'objection épistémologique est le défi lancé à tout platonicien d'expliquer comment un mathématicien accède à la connaissance du monde des objets mathématiques. Ce défi peut être formulé comme suit :

- (1) Les êtres humains sont tout entiers dans l'espace-temps.
- (2) S'il existe des êtres mathématiques, ils sont hors de l'espace-temps.
- (3) Donc, s'il existe des êtres mathématiques, alors les êtres humains ne peuvent accéder à leur connaissance.
- (4) Et donc finalement, le platonisme, qui affirme à la fois qu'il existe des êtres mathématiques et que les humains peuvent les connaître, est faux.

Un platonicien doit indiquer où pèche ce raisonnement. Diverses stratégies ont été utilisées par les philosophes platoniciens qui, cherchant à bloquer l'inférence faisant passer de (1) et (2) à (3), ont soutenu, soit des théories postulant un contact entre nous et les êtres mathématiques, soit des théories «sans contact». Certaines théories «avec contacts» affirment que nous possédons un sens particulier, l'intuition, nous donnant un accès direct au monde mathématique (Gödel), d'autres affirment que les êtres mathématiques sont présents de manière cachée dans les objets de notre espace-temps et que cette présence nous permet de les connaître – la philosophe américaine Penelope Maddy a récemment développé ce point de vue.

La conception gödélienne est jugée mystérieuse et peu claire : comment fonctionnerait cette intuition et quelle en serait la nature ? Les êtres mathématiques n'ont pas d'actions causales sur les êtres physiques, donc aucune transmission d'information ne peut s'opérer entre le monde mathématique et le monde physique. Rien ne semble donc fonder une théorie raisonnable de l'intuition mathématique «à la Gödel».

La conception de P. Maddy ne semble pas résister non plus à certaines objections précises. Par exemple, M. Balaguer note que pour un mathématicien l'objet a n'est pas le même que $\{a\}$ (l'ensemble ayant pour seul élément a) ou que $\{\{a\}\}$, (l'ensemble ayant pour seul élément, l'ensemble $\{a\}$), etc. alors que pourtant, si a est un objet physique, nous percevons ces différents ensembles de manière identique. La compréhension du monde mathématique (et surtout des objets infinis) ne pro-

vient donc pas de nos expériences avec les objets du monde physique, et donc elle reste mystérieuse.

Les théories platoniciennes «sans contact» proposent des explications de la façon dont l'esprit humain réussit, sans entrer en relation directe avec le monde des objets mathématiques, à en prendre connaissance. Elles sont nombreuses et tentent de justifier qu'il est faux que de (1) et (2) on déduit nécessairement (3). M. Balaguer démontre de façon assez convaincante que seul son platonisme plein relève le défi de l'objection épistémologique. M. Balaguer nous propose la parabole des villages népalais, le point central de sa conception et toute la force de son platonisme plein.

La théorie des villages népalais est explicitée sur la figure 3 : sans n'y avoir jamais été, ni avoir eu aucun contact avec lui nous avons la capacité de décrire les villages népalais hors de notre portée. De même, pour le platonisme plein, la connaissance du monde mathématique est possible sans avoir à postuler aucune intuition mystérieuse, sans avoir à envisager aucun canal de communication magique entre le monde abstrait où se déploient les êtres mathématiques et notre univers matériel, cela parce qu'à chaque fois que le mathématicien décrit des objets mathématiques possibles, ceux-ci existent réellement dans l'univers plein des mathématiques. Le défi de l'objection épistémologique est relevé par le platonisme plein – et par lui seul.

Bien sûr des questions restent posées concernant le sens du mot «possible» quand le platonicien plein définit sa position en disant qu'il considère que tous les objets mathématiques possibles existent. M. Balaguer précise donc que «possible» signifie «consistant» (non contradictoire) et il analyse soigneusement les diverses notions de consistance utilisées en logique (consistance syntaxique, consistance sémantique et consistance intuitive).

L'OBJECTION DE LA NON-UNICITÉ CONTRE LE PLATONISME

La seconde objection majeure formulée au platonisme (par Paul Benacerraf en 1965) est l'objection de la non-unicité. La voici. S'il existe des nombres entiers, alors forcément il en existe de plusieurs sortes et donc on ne peut pas parler du nombre 2 ou du nombre 37 comme le prétend un platonicien. Détaillons la difficulté. En théorie des ensembles (la théorie aujourd'hui systématiquement utilisée pour présenter les mathématiques), E. Zermelo a proposé de définir les entiers en posant : $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, etc. (réurrence $n+1 = \{n\}$). La méthode fonctionne parfaitement et on obtient de cette façon une structure possédant toutes les propriétés qu'on attribue aux entiers. Il se trouve qu'on peut aussi définir les entiers en s'appuyant sur