

3. LE PLATONISME PLEIN DE M. BALAGUER

Le platonisme «plein» de M. Balaguer est l'affirmation qu'à toute théorie logiquement consistante, correspondent des êtres mathématiques autrement dit : tous les êtres mathématiques possibles existent.

Le platonisme plein de M. Balaguer considère que notre capacité à faire des mathématiques est fondée sur notre capacité à maîtriser et à développer des théories consistantes et n'est pas liée à un improbable et mystérieux contact avec le monde des êtres mathématiques. Le platonisme plein explique que nous pouvons connaître de manière fiable les êtres mathématiques à l'aide de l'analogie du village népalais.

Un anthropologue, qui reste tout seul chez lui, et qui ne s'informe d'aucune façon sur les villages népalais, peut-il décrire des villages népalais sans se tromper? Oui, si tous les villages népalais – c'est-à-dire conformes à une définition précise et fixée – existent, car alors l'anthropologue n'aura qu'à utiliser la définition des villages népalais et proposer des descriptions consistantes de tels villages : à chaque fois qu'il en élaborera une, un des villages du monde plein des villages népalais sera conforme à son récit.

D'après le platonisme plein de M. Balaguer, le mathématicien peut de la même façon en restant chez lui et sans avoir aucun contact mental ou autre avec les êtres mathématiques les décrire et faire avancer leur connaissance. La connaissance du monde des êtres mathématiques est possible et sans mystère pour le platonisme plein.



défendre une vue ou une autre. Le platonisme de K. Gödel et la majorité des platonismes défendus jusqu'ici ne sont pas en mesure de répondre correctement aux deux objections qu'il place au cœur de son argumentaire : l'objection épistémologique et l'objection de la non-unicité.

L'OBJECTION ÉPISTÉMOLOGIQUE CONTRE LE PLATONISME

L'objection épistémologique est le défi lancé à tout platonicien d'expliquer comment un mathématicien accède à la connaissance du monde des objets mathématiques. Ce défi peut être formulé comme suit :

- (1) Les êtres humains sont tout entiers dans l'espace-temps.
- (2) S'il existe des êtres mathématiques, ils sont hors de l'espace-temps.
- (3) Donc, s'il existe des êtres mathématiques, alors les êtres humains ne peuvent accéder à leur connaissance.
- (4) Et donc finalement, le platonisme, qui affirme à la fois qu'il existe des êtres mathématiques et que les humains peuvent les connaître, est faux.

Un platonicien doit indiquer où pêche ce raisonnement. Diverses stratégies ont été utilisées par les philosophes platoniciens qui, cherchant à bloquer l'inférence faisant passer de (1) et (2) à (3), ont soutenu, soit des théories postulant un contact entre nous et les êtres mathématiques, soit des théories «sans contact». Certaines théories «avec contacts» affirment que nous possédons un sens particulier, l'intuition, nous donnant un accès direct au monde mathématique (Gödel), d'autres affirment que les êtres mathématiques sont présents de manière cachée dans les objets de notre espace-temps et que cette présence nous permet de les connaître – la philosophe américaine Penelope Maddy a récemment développé ce point de vue.

La conception gödélienne est jugée mystérieuse et peu claire : comment fonctionnerait cette intuition et quelle en serait la nature? Les êtres mathématiques n'ont pas d'actions causales sur les êtres physiques, donc aucune transmission d'information ne peut s'opérer entre le monde mathématique et le monde physique. Rien ne semble donc fonder une théorie raisonnable de l'intuition mathématique «à la Gödel».

La conception de P. Maddy ne semble pas résister non plus à certaines objections précises. Par exemple, M. Balaguer note que pour un mathématicien l'objet a n'est pas le même que $\{a\}$ (l'ensemble ayant pour seul élément a) ou que $\{\{a\}\}$, (l'ensemble ayant pour seul élément, l'ensemble $\{a\}$), etc. alors que pourtant, si a est un objet physique, nous percevons ces différents ensembles de manière identique. La compréhension du monde mathématique (et surtout des objets infinis) ne pro-

vient donc pas de nos expériences avec les objets du monde physique, et donc elle reste mystérieuse.

Les théories platoniciennes «sans contact» proposent des explications de la façon dont l'esprit humain réussit, sans entrer en relation directe avec le monde des objets mathématiques, à en prendre connaissance. Elles sont nombreuses et tentent de justifier qu'il est faux que de (1) et (2) on déduit nécessairement (3). M. Balaguer démontre de façon assez convaincante que seul son platonisme plein relève le défi de l'objection épistémologique. M. Balaguer nous propose la parabole des villages népalais, le point central de sa conception et toute la force de son platonisme plein.

La théorie des villages népalais est explicitée sur la figure 3 : sans n'y avoir jamais été, ni avoir eu aucun contact avec lui nous avons la capacité de décrire les villages népalais hors de notre portée. De même, pour le platonisme plein, la connaissance du monde mathématique est possible sans avoir à postuler aucune intuition mystérieuse, sans avoir à envisager aucun canal de communication magique entre le monde abstrait où se déploient les êtres mathématiques et notre univers matériel, cela parce qu'à chaque fois que le mathématicien décrit des objets mathématiques possibles, ceux-ci existent réellement dans l'univers plein des mathématiques. Le défi de l'objection épistémologique est relevé par le platonisme plein – et par lui seul.

Bien sûr des questions restent posées concernant le sens du mot «possible» quand le platonicien plein définit sa position en disant qu'il considère que tous les objets mathématiques possibles existent. M. Balaguer précise donc que «possible» signifie «consistant» (non contradictoire) et il analyse soigneusement les diverses notions de consistance utilisées en logique (consistance syntaxique, consistance sémantique et consistance intuitive).

L'OBJECTION DE LA NON-UNICITÉ CONTRE LE PLATONISME

La seconde objection majeure formulée au platonisme (par Paul Benacerraf en 1965) est l'objection de la non-unicité. La voici. S'il existe des nombres entiers, alors forcément il en existe de plusieurs sortes et donc on ne peut pas parler du nombre 2 ou du nombre 37 comme le prétend un platonicien. Détaillons la difficulté. En théorie des ensembles (la théorie aujourd'hui systématiquement utilisée pour présenter les mathématiques), E. Zermelo a proposé de définir les entiers en posant : $0=\emptyset$, $1=\{\emptyset\}$, $2=\{\{\emptyset\}\}$, $3=\{\{\{\emptyset\}\}\}$, etc. (réurrence $n+1=\{n\}$). La méthode fonctionne parfaitement et on obtient de cette façon une structure possédant toutes les propriétés qu'on attribue aux entiers. Il se trouve qu'on peut aussi définir les entiers en s'appuyant sur