

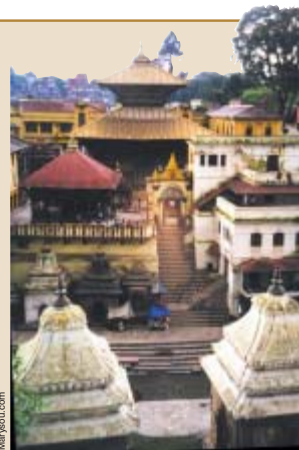
3. LE PLATONISME PLEIN DE M. BALAGUER

Le platonisme «plein» de M. Balaguer est l'affirmation qu'à toute théorie logiquement consistante, correspondent des êtres mathématiques autrement dit : tous les êtres mathématiques possibles existent.

Le platonisme plein de M. Balaguer considère que notre capacité à faire des mathématiques est fondée sur notre capacité à maîtriser et à développer des théories consistantes et n'est pas liée à un improbable et mystérieux contact avec le monde des êtres mathématiques. Le platonisme plein explique que nous pouvons connaître de manière fiable les êtres mathématiques à l'aide de l'analogie du village népalais.

Un anthropologue, qui reste tout seul chez lui, et qui ne s'informe d'aucune façon sur les villages népalais, peut-il décrire des villages népalais sans se tromper? Oui, si tous les villages népalais – c'est-à-dire conformes à une définition précise et fixée – existent, car alors l'anthropologue n'aura qu'à utiliser la définition des villages népalais et proposer des descriptions consistantes de tels villages : à chaque fois qu'il en élaborera une, un des villages du monde plein des villages népalais sera conforme à son récit.

D'après le platonisme plein de M. Balaguer, le mathématicien peut de la même façon en restant chez lui et sans avoir aucun contact mental ou autre avec les êtres mathématiques les décrire et faire avancer leur connaissance. La connaissance du monde des êtres mathématiques est possible et sans mystère pour le platonisme plein.



défendre une vue ou une autre. Le platonisme de K. Gödel et la majorité des platonismes défendus jusqu'ici ne sont pas en mesure de répondre correctement aux deux objections qu'il place au cœur de son argumentaire : l'objection épistémologique et l'objection de la non-unicité.

L'OBJECTION ÉPISTÉMOLOGIQUE CONTRE LE PLATONISME

L'objection épistémologique est le défi lancé à tout platonicien d'expliquer comment un mathématicien accède à la connaissance du monde des objets mathématiques. Ce défi peut être formulé comme suit :

- (1) Les êtres humains sont tout entiers dans l'espace-temps.
- (2) S'il existe des êtres mathématiques, ils sont hors de l'espace-temps.
- (3) Donc, s'il existe des êtres mathématiques, alors les êtres humains ne peuvent accéder à leur connaissance.
- (4) Et donc finalement, le platonisme, qui affirme à la fois qu'il existe des êtres mathématiques et que les humains peuvent les connaître, est faux.

Un platonicien doit indiquer où pèche ce raisonnement. Diverses stratégies ont été utilisées par les philosophes platoniciens qui, cherchant à bloquer l'inférence faisant passer de (1) et (2) à (3), ont soutenu, soit des théories postulant un contact entre nous et les êtres mathématiques, soit des théories «sans contact». Certaines théories «avec contacts» affirment que nous possédons un sens particulier, l'intuition, nous donnant un accès direct au monde mathématique (Gödel), d'autres affirment que les êtres mathématiques sont présents de manière cachée dans les objets de notre espace-temps et que cette présence nous permet de les connaître – la philosophe américaine Penelope Maddy a récemment développé ce point de vue.

La conception gödelienne est jugée mystérieuse et peu claire : comment fonctionnerait cette intuition et quelle en serait la nature? Les êtres mathématiques n'ont pas d'actions causales sur les êtres physiques, donc aucune transmission d'information ne peut s'opérer entre le monde mathématique et le monde physique. Rien ne semble donc fonder une théorie raisonnée de l'intuition mathématique «à la Gödel».

La conception de P. Maddy ne semble pas résister non plus à certaines objections précises. Par exemple, M. Balaguer note que pour un mathématicien l'objet a n'est pas le même que $\{a\}$ (l'ensemble ayant pour seul élément a) ou que $\{\{a\}\}$, (l'ensemble ayant pour seul élément, l'ensemble $\{a\}$), etc. alors que pourtant, si a est un objet physique, nous percevons ces différents ensembles de manière identique. La compréhension du monde mathématique (et surtout des objets infinis) ne pro-

vient donc pas de nos expériences avec les objets du monde physique, et donc elle reste mystérieuse.

Les théories platoniciennes «sans contact» proposent des explications de la façon dont l'esprit humain réussit, sans entrer en relation directe avec le monde des objets mathématiques, à en prendre connaissance. Elles sont nombreuses et tentent de justifier qu'il est faux que de (1) et (2) on déduit nécessairement (3). M. Balaguer démontre de façon assez convaincante que seul son platonisme plein relève le défi de l'objection épistémologique. M. Balaguer nous propose la parabole des villages népalais, le point central de sa conception et toute la force de son platonisme plein.

La théorie des villages népalais est explicitée sur la figure 3 : sans n'y avoir jamais été, ni avoir eu aucun contact avec lui nous avons la capacité de décrire les villages népalais hors de notre portée. De même, pour le platonisme plein, la connaissance du monde mathématique est possible sans avoir à postuler aucune intuition mystérieuse, sans avoir à envisager aucun canal de communication magique entre le monde abstrait où se déploient les êtres mathématiques et notre univers matériel, cela parce qu'à chaque fois que le mathématicien décrit des objets mathématiques possibles, ceux-ci existent réellement dans l'univers plein des mathématiques. Le défi de l'objection épistémologique est relevé par le platonisme plein – et par lui seul.

Bien sûr des questions restent posées concernant le sens du mot «possible» quand le platonicien plein définit sa position en disant qu'il considère que tous les objets mathématiques possibles existent. M. Balaguer précise donc que «possible» signifie «consistant» (non contradictoire) et il analyse soigneusement les diverses notions de consistance utilisées en logique (consistance syntaxique, consistance sémantique et consistance intuitive).

L'OBJECTION DE LA NON-UNICITÉ CONTRE LE PLATONISME

La seconde objection majeure formulée au platonisme (par Paul Benacerraf en 1965) est l'objection de la non-unicité. La voici. S'il existe des nombres entiers, alors forcément il en existe de plusieurs sortes et donc on ne peut pas parler du nombre 2 ou du nombre 37 comme le prétend un platonicien. Détaillons la difficulté. En théorie des ensembles (la théorie aujourd'hui systématiquement utilisée pour présenter les mathématiques), E. Zermelo a proposé de définir les entiers en posant : $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, etc. (réurrence $n+1 = \{n\}$). La méthode fonctionne parfaitement et on obtient de cette façon une structure possédant toutes les propriétés qu'on attribue aux entiers. Il se trouve qu'on peut aussi définir les entiers en s'appuyant sur

l'idée de von Neumann : $0=\emptyset$, $1=\{\emptyset\}$, $2=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3=2\cup\{2\}=\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc. (récurrence $n+1=n \cup \{n\}$). Mille autres idées sont envisageables et aucune n'est meilleure qu'une autre. Finalement, aucun critère ne permet de dire sérieusement ce qu'est le nombre 2. Il n'y a donc pas de nombre 2 contrairement à ce qu'affirme le platonicien. Plus grave, des théorèmes de logique mathématique (théorèmes de Löwenheim-Skolem) affirment que toute théorie non contradictoire formulée dans le langage du calcul des prédicats du premier ordre possède des modèles essentiellement différents (non isomorphes), car construits sur des ensembles ayant des cardinaux différents. En particulier, il existe un ensemble d'objets – nommés entiers non standards – satisfaisant tous les axiomes de l'arithmétique élémentaire et pourtant non dénombrables. Un objet mathématique n'existe jamais seul, chacun possède des doubles (en quantité infinie) et le mathématicien n'est jamais en mesure de parler d'un objet particulier précis contrairement à ce que son langage laisse croire. Le platonisme est faux.

Pour M. Balaguer, cette objection est sans gravité et la solution consiste à admettre, sans s'en offusquer, que le mathématicien parle toujours de plusieurs objets en même temps. Revenons aux villages népalais : tout se passe comme si celui qui voulait décrire des villages népalais n'avait jamais les moyens d'être assez précis pour ne parler que d'un village à la fois. Chaque récit qu'il propose s'applique à plusieurs villages. Cela serait certes un peu troublant, mais ne s'opposerait pas à l'idée que tout ce qu'il dit est vrai, et s'applique bien à des villages népalais réels. La situation en mathématiques serait invariablement de cette nature, et cela ne contredit pas vraiment le platonisme. L'argument de la non-unicité est sans gravité pour le platonicien plein et a pour seul effet de montrer que le langage mathématique qui, pour des raisons de commodité, parle au singulier du nombre 1, de l'espace de dimension 3, du groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, etc. ne doit pas être pris au pied de la lettre : le mathématicien comme l'anthropologue des villages népalais décrit toujours plusieurs réalités simultanément.

LES MATHÉMATIQUES SONT UN ROMAN COLLECTIF

Après avoir défendu le platonisme plein et en avoir proposé une version répondant aux grandes objections classiques qui lui avaient été opposées M. Balaguer entreprend de considérer le point de vue antiplatonicien.

La version d'antiplatonisme qu'il retient est une philosophie élaborée dans la décennie 1980 par le philosophe Harry Field et qui porte le nom de *fictionnalisme*. Pour un fictionnaliste, le mathématicien est dans la situation d'un romancier : ses personnages n'existent pas et rien de ce qu'il dit

n'est vrai. L'affirmation d'un mathématicien que «Le nombre 7 est un nombre premier» est du même type que celles de Gustave Flaubert quand il nous décrit les voyages de Madame Bovary à Rouen, ou qu'il nous fait part des fines analyses de Monsieur Homais. Tout est faux dans le récit de Flaubert, Madame Bovary n'est ni brune ni blonde, elle n'a jamais eu d'enfant, etc., cela simplement parce qu'elle n'existe pas. Pour un fictionnaliste : en mathématiques *stricto sensu* tout est faux. Il est important bien sûr que les récits mathématiques tiennent, c'est-à-dire qu'ils ne se contredisent pas d'une page à l'autre. Les histoires auxquelles s'intéressent les mathématiciens sont des fictions collectives, c'est-à-dire écrites à plusieurs (comme cela arrive parfois en littérature lorsqu'un personnage de roman est utilisé par plusieurs auteurs). Contrairement aux écrivains, les mathématiciens s'entendent pour attribuer à 7 la même place et les mêmes propriétés dans leurs récits : un mathématicien pourrait utiliser 8 là où les autres utilisent 7, mais plutôt que de s'amuser à cela (ce que rien n'interdit en théorie), ils préfèrent raconter de grands récits compatibles et complémentaires les uns des autres.

Satisfaire la contrainte logique de non-contradiction et déduire certaines affirmations d'autres affirmations formulées auparavant sont relativement faciles dans les romans. C'est un jeu qui l'est beaucoup moins dans les fictions mathématiques et d'ailleurs cela finit même par être l'essentiel du travail des mathématiciens. Les textes mathématiques sont pour un fictionnaliste des romans policiers où le raisonnement logique est l'essentiel. Le fictionnalisme est un antiplatonisme : il n'y a pas de monde des objets mathématiques et insistons bien : *stricto sensu* rien n'est vrai en mathématiques d'après cette philosophie.

L'objection principale formulée à l'encontre du fictionnalisme (ainsi qu'à l'encontre de toutes les conceptions antiplatonistes) est l'objection de l'applicabilité : si toutes les mathématiques ne sont qu'inventions plus ou moins libres et arbitraires des mathématiciens à propos d'objets qui n'existent nulle part, comment se fait-il que les mathématiques soient si efficaces et s'appliquent si bien dans les sciences de la nature. Le roman de Flaubert, lui, n'apporte pas la moindre aide pour élaborer des théories physiques ou autres. Puisque les théories scientifiques se réfèrent sans cesse aux nombres et à toutes sortes d'objets mathématiques comme s'ils existaient, et qu'elles s'appuient sur leurs propriétés comme s'il s'agissait de vérités, comment penser que les mathématiques sont fausses ? Comment le fictionnaliste peut-il expliquer que d'affirmations fausses on déduise des faits avérés du monde physique ?

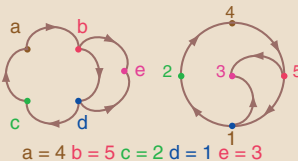
La réponse proposée par H. Field et reprise par M. Balaguer est qu'en formulant soigneusement les théories physiques qui font usage des concepts mathématiques (et qui semblent donc se référer à des objets mathématiques comme s'ils existaient), on peut éviter de s'y référer. H. Field propose

4. L'ISOMORPHISME ET L'OBJECTION DE NON-UNICITÉ

Deux objets mathématiques sont isomorphes si on peut les mettre en correspondance parfaite. Par exemple, deux graphes sont isomorphes s'il existe une façon de renommer les nœuds du premier de façon à ce qu'il soit identique au second.

La notion de structure isomorphe se généralise à toutes sortes d'objets mathématiques. Deux objets isomorphes du point de vue mathématique sont équivalents.

L'ensemble des nombres entiers est isomorphe à une infinité d'autres, ce qui rend impossible de parler du nombre 1 ou du nombre 37. Cette non-unicité est un problème pour le platonicien qui défend l'idée qu'il y a un ensemble unique de nombres entiers, donc un seul nombre 1, un seul nombre 2, etc. Cette objection de la non-unicité a été formulée contre le platonisme par P. Benacerraf.



La réponse du platonisme plein de M. Balaguer est de dire qu'il faut admettre qu'aucune théorie consistante ne parle d'un seul objet mathématique à la fois : il y a donc plusieurs ensembles de nombres entiers (donc plusieurs «nombre 1», plusieurs «nombre 55» etc.) et, pour raison de commodité, le mathématicien s'exprime

comme s'il y avait un ensemble bien déterminé et unique de nombres entiers. L'impossibilité de parler d'un seul objet à la fois est insurmontable et liée à l'idée que, pour un platonicien plein, le mathématicien n'a pas d'accès direct au monde des êtres mathématiques (voir la parabole des villages népalais). La non-unicité ne gêne pas le platonisme plein et au contraire conforte sa conception «sans contact» de la connaissance mathématique.