

l'idée de von Neumann : $0=\emptyset$, $1=\{\emptyset\}$, $2=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3=2\cup\{2\}=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc. (récurrance $n+1= n \cup \{n\}$). Mille autres idées sont envisageables et aucune n'est meilleure qu'une autre. Finalement, aucun critère ne permet de dire sérieusement ce qu'est le nombre 2. Il n'y a donc pas de nombre 2 contrairement à ce qu'affirme le platonicien. Plus grave, des théorèmes de logique mathématique (théorèmes de Löwenheim-Skolem) affirment que toute théorie non contradictoire formulée dans le langage du calcul des prédicats du premier ordre possède des modèles essentiellement différents (non isomorphes), car construits sur des ensembles ayant des cardinaux différents. En particulier, il existe un ensemble d'objets – nommés entiers non standards – satisfaisant tous les axiomes de l'arithmétique élémentaire et pourtant non dénombrables. Un objet mathématique n'existe jamais seul, chacun possède des doubles (en quantité infinie) et le mathématicien n'est jamais en mesure de parler d'un objet particulier précis contrairement à ce que son langage laisse croire. Le platonisme est faux.

Pour M. Balaguer, cette objection est sans gravité et la solution consiste à admettre, sans s'en offusquer, que le mathématicien parle toujours de plusieurs objets en même temps. Revenons aux villages népalais : tout se passe comme si celui qui voulait décrire des villages népalais n'avait jamais les moyens d'être assez précis pour ne parler que d'un village à la fois. Chaque récit qu'il propose s'applique à plusieurs villages. Cela serait certes un peu troublant, mais ne s'opposerait pas à l'idée que tout ce qu'il dit est vrai, et s'applique bien à des villages népalais réels. La situation en mathématiques serait invariablement de cette nature, et cela ne contredit pas vraiment le platonisme. L'argument de la non-unicité est sans gravité pour le platonicien plein et a pour seul effet de montrer que le langage mathématique qui, pour des raisons de commodité, parle au singulier du nombre 1, de l'espace de dimension 3, du groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, etc. ne doit pas être pris au pied de la lettre : le mathématicien comme l'anthropologue des villages népalais décrit toujours plusieurs réalités simultanément.

LES MATHÉMATIQUES SONT UN ROMAN COLLECTIF

Après avoir défendu le platonisme plein et en avoir proposé une version répondant aux grandes objections classiques qui lui avaient été opposées M. Balaguer entreprend de considérer le point de vue antiplatonicien.

La version d'antiplatonisme qu'il retient est une philosophie élaborée dans la décennie 1980 par le philosophe Harry Field et qui porte le nom de *fictionnalisme*. Pour un fictionnaliste, le mathématicien est dans la situation d'un romancier : ses personnages n'existent pas et rien de ce qu'il dit

n'est vrai. L'affirmation d'un mathématicien que «Le nombre 7 est un nombre premier» est du même type que celles de Gustave Flaubert quand il nous décrit les voyages de Madame Bovary à Rouen, ou qu'il nous fait part des fines analyses de Monsieur Homais. Tout est faux dans le récit de Flaubert, Madame Bovary n'est ni brune ni blonde, elle n'a jamais eu d'enfant, etc., cela simplement parce qu'elle n'existe pas. Pour un fictionnaliste : en mathématiques *stricto sensu* tout est faux. Il est important bien sûr que les récits mathématiques tiennent, c'est-à-dire qu'ils ne se contredisent pas d'une page à l'autre. Les histoires auxquelles s'intéressent les mathématiciens sont des fictions collectives, c'est-à-dire écrites à plusieurs (comme cela arrive parfois en littérature lorsqu'un personnage de roman est utilisé par plusieurs auteurs). Contrairement aux écrivains, les mathématiciens s'entendent pour attribuer à 7 la même place et les mêmes propriétés dans leurs récits : un mathématicien pourrait utiliser 8 là où les autres utilisent 7, mais plutôt que de s'amuser à cela (ce que rien n'interdit en théorie), ils préfèrent raconter de grands récits compatibles et complémentaires les uns des autres.

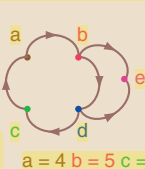
Satisfaire la contrainte logique de non-contradiction et déduire certaines affirmations d'autres affirmations formulées auparavant sont relativement faciles dans les romans. C'est un jeu qui l'est beaucoup moins dans les fictions mathématiques et d'ailleurs cela finit même par être l'essentiel du travail des mathématiciens. Les textes mathématiques sont pour un fictionnaliste des romans policiers où le raisonnement logique est l'essentiel. Le fictionnalisme est un antiplatonisme : il n'y a pas de monde des objets mathématiques et insistons bien : *stricto sensu* rien n'est vrai en mathématiques d'après cette philosophie.

L'objection principale formulée à l'encontre du fictionnalisme (ainsi qu'à l'encontre de toutes les conceptions antiplatonistes) est l'objection de l'applicabilité : si toutes les mathématiques ne sont qu'inventions plus ou moins libres et arbitraires des mathématiciens à propos d'objets qui n'existent nulle part, comment se fait-il que les mathématiques soient si efficaces et s'appliquent si bien dans les sciences de la nature. Le roman de Flaubert, lui, n'apporte pas la moindre aide pour élaborer des théories physiques ou autres. Puisque les théories scientifiques se réfèrent sans cesse aux nombres et à toutes sortes d'objets mathématiques comme s'ils existaient, et qu'elles s'appuient sur leurs propriétés comme s'il s'agissait de vérités, comment penser que les mathématiques sont fausses? Comment le fictionnaliste peut-il expliquer que d'affirmations fausses on déduise des faits avérés du monde physique?

La réponse proposée par H. Field et reprise par M. Balaguer est qu'en formulant soigneusement les théories physiques qui font usage des concepts mathématiques (et qui semblent donc se référer à des objets mathématiques comme s'ils existaient), on peut éviter de s'y référer. H. Field propose

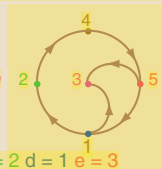
4. L'ISOMORPHISME ET L'OBJECTION DE NON-UNICITÉ

Deux objets mathématiques sont isomorphes si on peut les mettre en correspondance parfaite. Par exemple, deux graphes sont isomorphes s'il existe une façon de renommer les nœuds du premier de façon à ce qu'il soit identique au second.



La notion de structure isomorphe se généralise à toutes sortes d'objets mathématiques. Deux objets isomorphes du point de vue mathématique sont équivalents.

L'ensemble des nombres entiers est isomorphe à une infinité d'autres, ce qui rend impossible de parler du nombre 1 ou du nombre 37. Cette non-unicité est un problème pour le platonicien qui défend l'idée qu'il y a un ensemble unique de nombres entiers, donc un seul nombre 1, un seul nombre 2, etc. Cette objection de la non-unicité a été formulée contre le platonisme par P. Benacerraf.



$$a = 4 \quad b = 5 \quad c = 2 \quad d = 1 \quad e = 3$$

La réponse du platonisme plein de M. Balaguer est de dire qu'il faut admettre qu'aucune théorie consistante ne parle d'un seul objet mathématique à la fois : il y a donc plusieurs ensembles de nombres entiers (donc plusieurs «nombre 1», plusieurs «nombre 55» etc.) et, pour raison de commodité, le mathématicien s'exprime

comme s'il y avait un ensemble bien déterminé et unique de nombres entiers. L'impossibilité de parler d'un seul objet à la fois est insurmontable et liée à l'idée que, pour un platonicien plein, le mathématicien n'a pas d'accès direct au monde des êtres mathématiques (voir la parabole des villages népalais). La non-unicité ne gêne pas le platonisme plein et au contraire conforte sa conception «sans contact» de la connaissance mathématique.

5. SI CELA EXISTE, C'EST FONDAMENTAL

Le fictionnalisme et le platonisme plein s'accordent sur un grand nombre de points (par exemple, sur l'importance à attribuer à la notion de consistance et à la logique), mais bien sûr s'opposent radicalement sur un point : l'existence du monde des êtres mathématiques et la vérité des énoncés mathématiques.

M. Balaguer défend que cette situation doit être prise au sérieux et acceptée comme telle : les conceptions de la façon dont les mathématiciens produisent de la connaissance mathématique et l'explication de l'efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature – points

où les deux philosophies s'accordent – doivent être considérées comme justes, mais le désaccord doit être considéré comme définitif et insurmontable. Nous ne disposons pas et ne disposerons jamais du moyen de savoir si le monde des êtres mathématiques existe ou non. L'indétermination dans laquelle nous sommes est radicale et ultime. La séparation du monde physique et du monde mathématique (s'il existe) empêche qu'il y ait des faits significatifs conduisant à trancher entre les deux seules philosophies acceptables des mathématiques que sont le fictionnalisme et le platonisme plein.

un programme de « nominalisation » de la physique qui consiste à transformer les théories physiques en théories n'ayant plus à postuler l'existence d'aucun nombre ni d'aucun objet mathématique. Cette idée que finalement dans une théorie physique la référence à des objets mathématiques est accessoire n'est peut-être pas surprenante : quand un physicien affirme que « la température du système S est de 37°C » l'usage qu'il fait du nombre 37 peut être évité en remplaçant les nombres par des noms d'états d'énergie, seuls ces états (physiques) étant supposés exister. Dit autrement : un physicien n'a jamais besoin de postuler que les objets mathématiques existent, car il utilise les mathématiques comme un moyen commode pour exprimer des propriétés du monde physique qu'un langage plus prudent et contourné lui permettrait d'éviter.

M. Balaguer complète les thèses de H. Field en détaillant comment on peut se dispenser de prendre au sérieux l'existence des êtres mathématiques (et donc d'y croire) lorsque l'on présente la mécanique quantique – ce qui semblait délicat. Cette objection étant la principale qui ait été opposée au fictionnalisme, on en arrive donc au terme de cette deuxième étape du cheminement philosophique de M. Balaguer à disposer de deux métaphysiques satisfaisantes des mathématiques : le platonisme plein et le fictionnalisme. Est-ce que rien ne les départage vraiment ?

L'INDÉTERMINATION RADICALE DE L'ONTOLOGIE

Bien qu'apparemment aussi éloignées qu'il est possible, les deux positions successivement défendues par M. Balaguer se retrouvent sur certains points.

(1) Concernant l'hypothèse du continu, les deux philosophies suggèrent la même attitude : on peut adopter l'hypothèse du continu ou sa négation, car l'hypothèse du continu n'est pas une question réellement déterminée, mais bien une propriété laissée au choix du mathématicien. L'important est que les théories des ensembles qu'on utilise soient consistantes. Cette attitude est celle adoptée par la grande majorité des mathématiciens depuis une trentaine d'années.

(2) Il n'est pas nécessaire de ramener l'usage de l'infini à celui du fini comme le préconisent souvent les antiplatoniciens en entreprenant des programmes de « réduction » (ceux-ci d'ailleurs rencontrent l'indifférence générale des scientifiques). Pour un platonicien plein ou un fictionnaliste, la consistance des théories de l'infini suffit à les justifier.

(3) Les connaissances mathématiques peuvent se développer librement selon l'usage adopté aujourd'hui par les mathématiciens et fondé sur la théorie des ensembles et la méthode axiomatique. Il est inutile de s'imposer des normes restrictives du type de celles proposées par les intuitionnistes (interdiction du « tiers exclu ») ou les constructivistes (exigences que tout énoncé existentiel – du type « il existe a tel que X » – soit accompagné d'une construction effective).

(4) L'important est la consistance (la non-contradiction), et les mathématiques sont principalement une affaire de logique.

(5) Les théories mathématiques parlent des objets mathématiques sans détour. Pour les platoniciens, ceux-ci existent, pour les fictionnalistes, ils n'existent pas, mais ce sont ces objets qui sont au cœur des mathématiques, pas d'autres choses telles que les déductions formelles, les constructions mentales, etc., comme le prétendent certains.

(6) Les deux conceptions de M. Balaguer soutiennent que les objets mathématiques n'ont pas d'actions causales dans notre univers, c'est-à-dire sont indépendants du monde physique. Aucune de ces deux conceptions n'a besoin de faire appel à des mécanismes particuliers mettant en contact notre monde et celui des mathématiques.

(7) Les deux théories soutiennent des théories épistémologiques proches : la connaissance mathématique provient de notre aptitude à mener des raisonnements logiques et de notre capacité à élaborer et à maîtriser des théories consistantes.

M. Balaguer considère que cette convergence des deux points de vue n'est pas un hasard et confirme leur justesse fondamentale à chacune. Quant à leur divergence, il soutient qu'en un sens, elle n'a pas d'importance et qu'il est vraisemblable qu'elle ne peut pas être résolue. Non seulement rien ne permet aujourd'hui de choisir entre fictionnalisme et platonisme plein, mais sans doute, rien ne permettra jamais de choisir. Le monde mathématique, s'il existe, est causalement isolé du nôtre et donc rien ne nous conduira jamais à être certain de son existence, tout sera donc pour nous comme s'il n'existait pas. L'existence du monde mathématique a un sens, mais cette existence est hors de notre portée, car aucun des faits auxquels nous avons accès n'est pertinent pour la question. L'existence du monde mathématique est fondamentalement indéterminée : à l'aide des informations dont nous disposons et dans la situation où nous sommes, nous ne saurons jamais lequel du platonisme plein ou de l'antiplatonisme fictionnaliste est exact. Cette indétermination radicale doit être acceptée et nous délivrer de l'obsession de la recherche d'une solution (ce que les mathématiciens semblent avoir compris depuis longtemps). Le désengagement ontologique généralisé, y compris en logique, est la seule attitude raisonnable.

A-t-on atteint avec les conceptions de M. Balaguer l'étape ultime de la philosophie métaphysique des mathématiques, qui la rendrait dorénavant inutile ? J'imagine que ses collègues ne seront pas d'accord pour l'admettre !

M. BALAGUER, *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

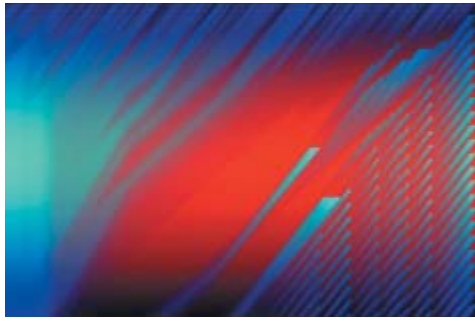
D. W. HART (sous la direction de), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford Readings in Philosophy, OUP, Oxford, 1996.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, 1990.

M. PANZA et J.-M. SALANSKIS (sous la direction de), *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, Masson, 1995.

H. FIELD, *Science Without Numbers*, Princeton Univ. Press, 1980.

H. FIELD, *Realism, Mathematics and Modality*, Basic Books, 1989.

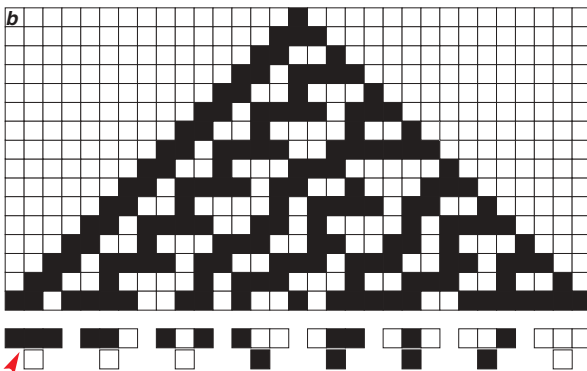
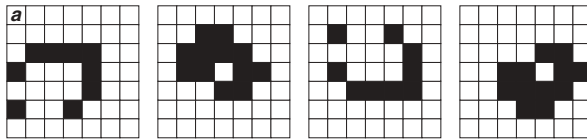


L'art cellulaire

BERNARD CAILLAUD

Dans l'art informatique, la logique et le tube cathodique remplacent le ciseau et le pinceau. Les formes, qui pourtant résultent de règles simples, sont étonnantes et, en partie, imprévisibles.

Au début des années 1960, les artistes découvrent un nouveau champ d'expression : l'ordinateur. Pour les adeptes de l'art informatique, l'écran du tube cathodique se substitue à la toile ou au bloc de marbre des générations précédentes. À cette époque, le mathématicien John von Neumann s'intéresse à la mise au point du *kinematon*, une machine qui, à partir d'éléments de son environnement, fabriquerait une copie d'elle-même. Ses études aboutissent à l'élaboration, avec Stanislas Ulam, d'une version formalisée de cette machine, les automates cellulaires. Dans ces constructions, un espace est subdivisé en éléments identiques, nommés cellules, qui évoluent par étapes discrètes en obéissant à des règles simples de voisinage : dans un plan, le devenir d'une cellule dépend de l'état de ses huit plus proches voisines. Par exemple, dans un plan divisé en cases noires ou blanches selon une répartition initiale aléatoire, une règle stipulerait que, d'une étape à la suivante, une cellule dont le nombre de voisines noires est pair reste inchangée, sinon, elle change de couleur.



Un automate cellulaire explore le devenir de cellules qui évoluent par étapes selon des règles de voisinages. Dans le *Jeu de la vie* (a), un automate à deux dimensions, les règles stipulent que, d'une étape à la suivante, une cellule blanche devient noire si exactement trois de ses huit voisines sont noires et qu'une cellule noire ne le reste que si elle a deux ou trois voisines noires, sinon elle devient blanche. Dans le cas d'un automate à une dimension (b), on peut définir huit règles de voisinage (en bas). Par exemple, selon l'une d'elles (flèche rouge), une cellule noire entourée de deux cellules noires devient blanche. Lorsque les états successifs sont alignés, les motifs qui apparaissent sont *a priori* imprévisibles et on y découvre à la fois des régularités et des structures variables.

Mon tableau de la page ci-contre, *Chromatisation N° 5*, est le résultat d'un automate cellulaire plus complexe. Pénétrons les mystères de ces constructions de l'esprit rendues visibles par l'informatique. Puis, nous découvrirons que leur domaine d'application ne fait que croître.

Au moment de leur apparition, les automates cellulaires restent confidentiels, ils seront popularisés dans les années 1970 grâce au *Jeu de la vie* (voir la figure a) du mathématicien John Conway. Là aussi, sur un plan quadrillé supposé infini, des cellules changent d'état colorimétrique (une cellule est noire quand elle est vivante, blanche lorsqu'elle est morte) à mesure que des règles simples sont appliquées : une cellule blanche naît à l'instant $t + 1$ si exactement trois de ses huit voisines sont vivantes à l'instant t ; une cellule vivante, noire, à l'instant t ne survit à l'instant $t + 1$ que si elle a deux ou trois voisines vivantes, sinon elle meurt et devient blanche. Certaines configurations initiales de cellules s'étendent, d'autres produisent des motifs périodiques, d'autres encore disparaissent, reproduisant ainsi l'évolution de certaines populations animales. Le *Jeu de la vie* est au cœur de *Biowall*, une œuvre de Daniel Mange, du Laboratoire de systèmes logiques, à l'École polytechnique de Lausanne, exposée en octobre 2002 à la Maison européenne de la photographie, à Paris.

Revenons au tableau qui, à l'inverse des exemples précédents, est le produit d'un automate cellulaire à une dimension. Expliquons-nous. Sur une ligne de 480 cellules, le devenir de chacune, de l'instant t à l'instant $t + 1$, dépend des deux cellules voisines et d'elle-même. Lorsqu'on affiche, l'un au-dessous de l'autre, les instants successifs de l'automate, l'écran se remplit peu à peu. La deuxième dimension représente le temps, discret. L'écran n'affiche plus alors un seul état de l'automate cellulaire, mais l'ensemble de son évolution (voir la figure b).

Par ailleurs, ici, les cellules n'oscillent plus entre deux états, le noir et le blanc, mais plutôt, la couleur ayant fait irruption, entre de multiples états colorimétriques. Ces états, nommés C , sont représentés par un nombre, arbitraire, pris, par exemple entre 0 et 100. La couleur de la cellule, que l'on exprime par des proportions (les coordonnées R, V et B) des trois couleurs primaires, le rouge, le vert et le bleu, est une fonction de son état colorimétrique C . Les règles de changements d'état d'une cellule peuvent ne s'appliquer qu'aux états colorimétriques de cette cellule et de ces deux voisines, mais elles peuvent également tenir compte, en plus, du rang i (entre 0 et 480) de la cellule dans la ligne. C'est le cas ici : à l'instant $t + 1$, le nouvel état colorimétrique C_i^* de la cellule i est égal à $(-0,2C_{i-1} + 0,55C_t + 0,6C_{i+1} + 100i/480) \bmod 100$ où C_i , C_{i-1} et C_{i+1} sont les états colorimétriques, à l'instant t , de la cellule i et de ses voisines de gauche et de droite. La fonction *modulo 100* assure que l'état colorimétrique C^* est bien compris entre 0 et 100.