

autre question vient immédiatement à l'esprit du mathématicien : peut-on adapter le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien aux découpages articulés ? Autrement dit à chaque fois que deux polygones ayant même aire sont donnés peut-on créer un découpage avec charnières qui se replie au choix en l'un ou en l'autre des polygones. Dit encore autrement, ce que l'on est sûr de savoir faire avec les deux mains, peut-on toujours le faire en s'imposant de garder une main dans le dos ?

Cette question de géométrie élémentaire n'est pas résolue aujourd'hui, mais les nombreux découpages articulés découverts ces dernières années par Greg Frederickson et quelques autres passionnés suggèrent que oui. G. Frederickson a force de découvrir des solutions à tous les problèmes qu'il se posait est aujourd'hui persuadé que cette conjecture des découpages articulés doit être vraie. Qui la démontrera ?

Un point complet sur ces dissections est présenté dans le livre que vient de publier G. Frederickson intitulé *Hinged Dissections : Swinging and Twisting* (Cambridge University Press, 2002). Ce livre admirablement illustré est un trésor de beautés géométriques prouvant à ceux qui en doutaient que la géométrie du plan est toujours vivante et que les mathématiques divertissantes sont susceptibles

de produire des formes inattendues et des objets mécaniques nouveaux et inespérés. Certaines animations de découpages avec charnières peuvent être admirées sur le site internet de G. Frederickson : <http://www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book2/hingdanim.html>

Assez étrangement G. Frederickson, spécialiste incontesté des découpages articulés, n'est pas géomètre, mais informaticien spécialisé dans l'analyse d'algorithmes et les algorithmes de graphes. Il enseigne aujourd'hui à l'Université de Purdue dans l'État d'Indiana aux États-Unis. Comme l'écrit à son sujet Brian Colombo, il n'aime pas du tout les figures géométriques... puisqu'il en fait systématiquement le découpage. J'ignore si c'est parce qu'il était lassé de reconstituer les divers puzzles – modèles en bois ou en carton – que l'on obtient à partir des découpages classiques. Toujours est-il qu'il s'est spécialisé dans les découpages articulés, plus faciles à ranger.

UN PEU DE MÉTHODE

Comment découpe-t-on ces découpages articulés qui semblent miraculeux ? Une première voie est bien sûr de reprendre les découpages sans charnières et d'essayer de les munir de charnières. Pour chacun des découpages classiques et

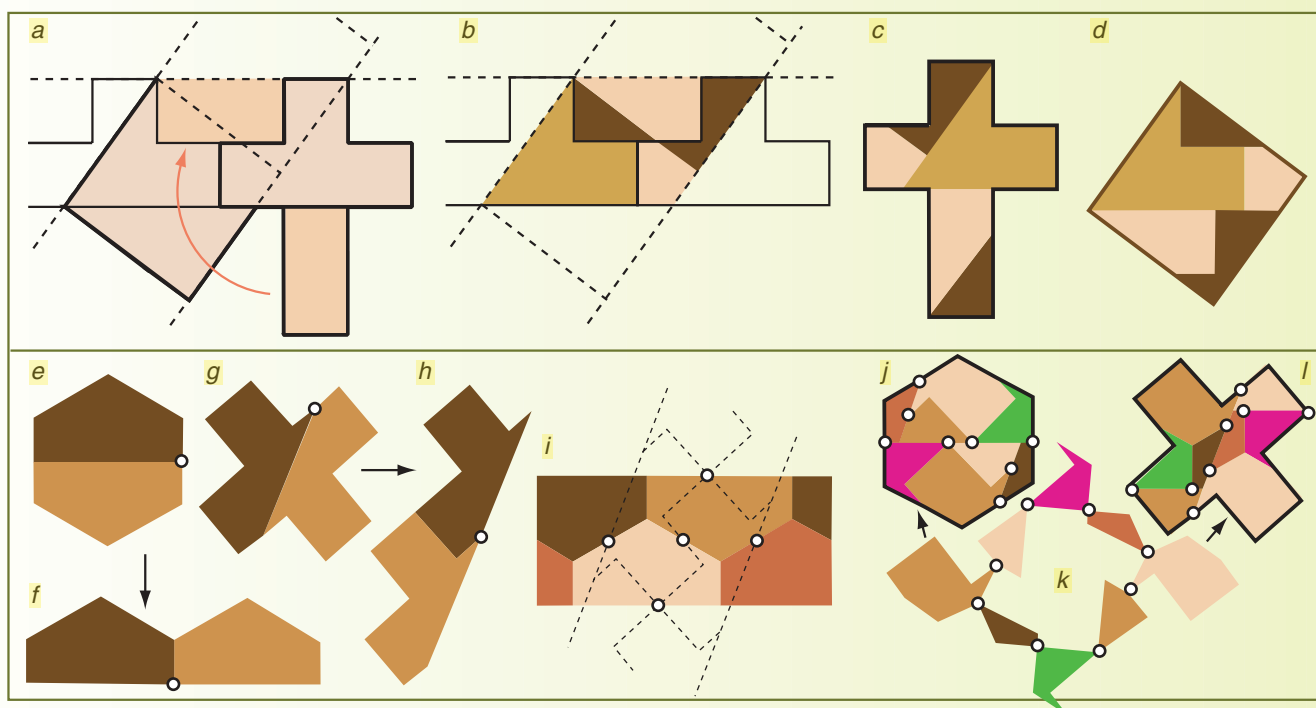
en particulier pour ceux établissant des records de minimalité, G. Frederickson s'est posé la question : peut-on lier les pièces d'une façon qui autorise un double repliement ? La réponse est oui dans un nombre surprenant de cas.

Bien sûr, les cas intéressants sont ceux où le découpage minimal ne peut pas être muni de charnières, car alors se posent les deux questions suivantes :

- Le découpage avec charnière est-il possible ? (puisque aucun équivalent du théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien n'a été démontré, la réponse n'est pas connue d'avance) ;
- S'il est possible, quel est le minimum de pièces liées par des charnières permettant le découpage ?

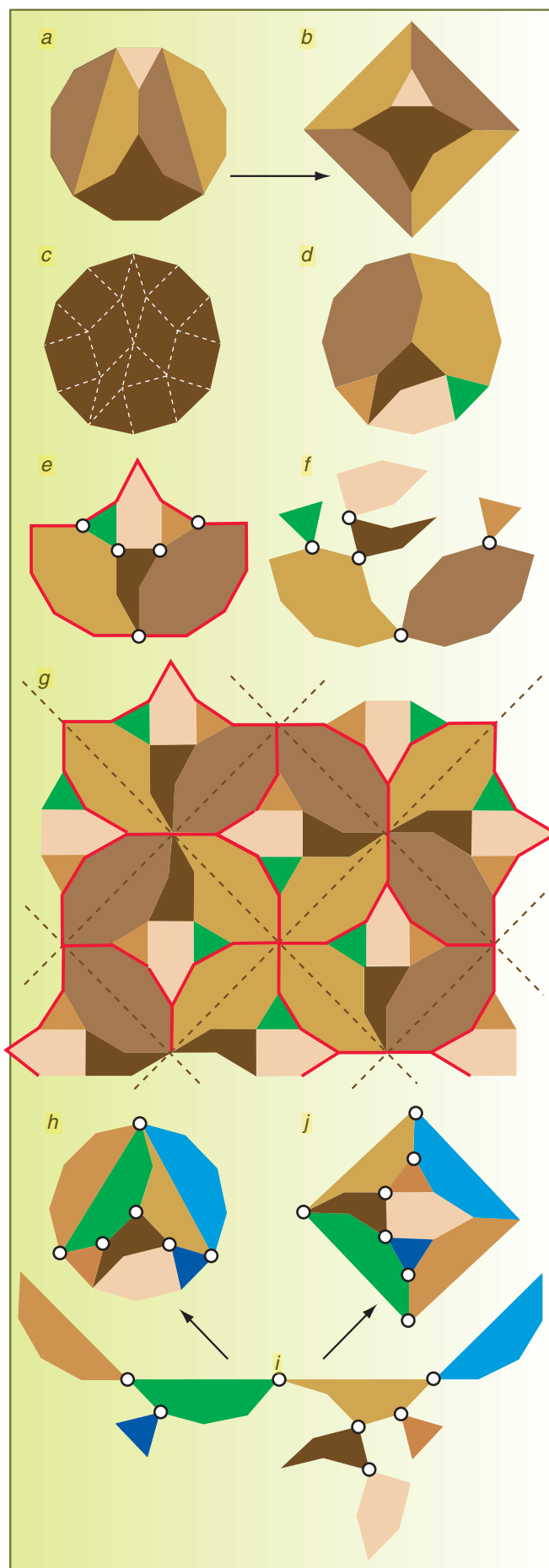
Avant d'examiner ces questions, nous allons voir comment Lindgren obtenait ses découpages. Bien sûr, on peut procéder par tâtonnement et espérer que la patience et la familiarité qu'on finira par acquérir avec l'énigme conduiront à une solution ; cependant plusieurs techniques générales se sont révélées utiles.

La première méthode est la méthode des frises explicitée sur la figure 2 et la seconde qui la généralise, la méthode des pavages du plan, illustrée sur la figure 3. Le découpage proposé par Lindgren sépare en six morceaux le dodécagone régulier et permet de recomposer un carré



2. LA MÉTHODE DE LINDGREN résout ou améliore grandement les découpages. Elle consiste à disposer les deux figures de même aire en deux «frises», puis à superposer ces deux frises en les orientant de façon à tirer avantage des «coins» des figures. Ici on a d'abord transformé une croix latine (c) en carré (d). La frise du carré est naturelle, il suffit d'aligner des carrés jointifs. La frise de la croix latine est obtenue en coupant le pied et en le tournant de 90 degrés (a). L'aire de l'intersection des deux frises (b) est constante, ce qui explique la validité de la méthode.

Le découpage donne ici une transformation «record» en cinq pièces. Ce découpage ne permet hélas pas de système articulé. Examinons maintenant la transformation de l'hexagone en croix grecque. Après avoir créé deux découpages articulés, l'un de l'hexagone (e-f), l'autre de la croix grecque (g-h) dont les versions dépliées servent à constituer des frises, on superpose les deux bandes pavées (j). Cela détermine la forme des pièces du découpage articulé (k) permettant de transformer un hexagone régulier en croix grecque (fk-l).



(voir les figures 3a et 3b). Aucun système de charnières reliant ces six pièces n'autorise le double repliement espéré. G. Frederickson a proposé un nouveau découpage avec charnières (voir les figures 3 h-i-j) pour le même problème utilisant deux pièces de plus. Il n'y a rien d'étonnant à ce que des pièces supplémentaires soient nécessaires, ce qui l'est peut-être est que deux pièces supplémentaires suffisent.

Les figures de cet article présentent quelques-uns des découpages remarquables de G. Frederickson. Les exemples que nous avons choisis concernent des figures très simples : triangles équilatéraux, carrés, étoiles, etc. Il apparaît qu'à chaque fois que G. Frederickson a essayé de trouver un découpage articulé, il a réussi et cela sans avoir à utiliser un très grand nombre de pièces. La variante conjecturée du théorème des découpages est expérimentalement vérifiée pour les découpages articulés.

PAVAGES ET FRISES

Revenons à la méthode du pavage de Lindgren ainsi qu'à sa variante mise au point par G. Frederickson qui aide à la découverte des découpages articulés.

L'idée est de dessiner deux pavages périodiques du plan, l'un pour la première figure à laquelle on s'intéresse et l'autre pour la seconde. Les parties des pavages qui se répètent doivent être compatibles (les deux mêmes translations doivent laisser invariant chacun des pavages), ce qui est rendu assez facile par le fait que les figures dont on est parti ont la même aire. Toute figure ne peut pas être utilisée directement pour paver le plan (sans chevauchement ni interstice), par exemple les polygones réguliers à plus de six côtés ne sont pas des paveurs. C'est pourquoi Lindgren propose de prédécouper les pièces qui ne pavent pas bien le plan de façon à ce qu'un arrangement de ces pièces prédécoupées pavent le plan. Lindgren a découvert de nombreux prédécoupages des polygones réguliers se recomposant en motifs pavant le plan. Sur les figures 3 e-f-g, un prédécoupage pour le dodécagone est proposé ainsi que le pavage du plan correspondant.

Les deux pavages constitués (l'un au moins sur une feuille de papier calque), on les superpose, ce qui donne de nouveaux traits de coupe subdivisant un polygone en pièces de plus petite taille (voir la figure 3 g). En faisant glisser le calque, on recherche une superposition qui ne crée pas un trop grand nombre de pièces et surtout on s'assure – ce qui demande une certaine attention, mais est facilité par les dessins des pavages initiaux – que les pièces proposées vont correctement s'assembler pour donner les deux figures recherchées. Les subtilités et les variantes de cette technique sont nombreuses et c'est dans son utilisation que le génie géométrique de chacun pourra s'exprimer.

G. Frederickson a remarqué que lorsqu'on procédait ainsi, on obtenait souvent des découpages attachables par charnières à condition que les pièces du prédécoupage soient elles-mêmes attachables entre elles par un jeu de charnières (voir la figure 3f) et que les points d'intersection des réseaux soient des centres de rotation des réseaux, c'est-à-dire des points qui lorsqu'on fait tourner le réseau d'un angle donné (par exemple 60 degrés) le laissent invariant. Voilà qui aide la recherche. Avec cette méthode,

3. DÉCOUPAGE ARTICULÉ DU DODÉCAGONE EN CARRÉ. Un dodécagone peut être découpé en 6 pièces qui s'assemblent en carré (a-b), mais ce découpage ne donne pas une chaîne articulée. Pour obtenir cette chaîne, on conçoit un assemblage articulé de six pièces qui fait passer du dodécagone à une pièce pavant le plan (e). Les pointillés du schéma (c) identifient les angles et les longueurs utilisées dans le découpage (d) de la pièce articulée (f) qui se replie en un polygone (e) pavant le plan (g). La superposition d'un pavage du plan par des carrés (pavage en pointillé sur le schéma (g)) détermine alors un découpage articulé de l'octogone et du carré (h-j).