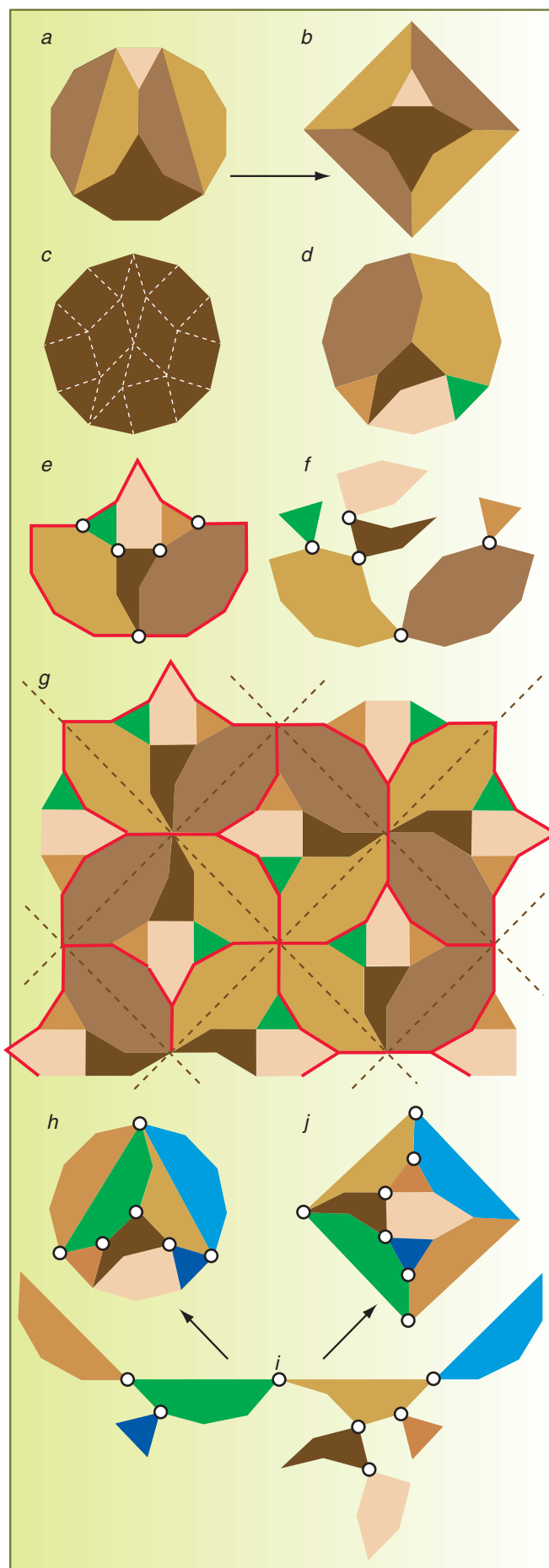




(voir les figures 3a et 3b). Aucun système de charnières reliant ces six pièces n'autorise le double repliement espéré. G. Frederickson a proposé un nouveau découpage avec charnières (voir les figures 3 h-i-j) pour le même problème utilisant deux pièces de plus. Il n'y a rien d'étonnant à ce que des pièces supplémentaires soient nécessaires, ce qui l'est peut-être est que deux pièces supplémentaires suffisent.

Les figures de cet article présentent quelques-uns des découpages remarquables de G. Frederickson. Les exemples que nous avons choisis concernent des figures très simples : triangles équilatéraux, carrés, étoiles, etc. Il apparaît qu'à chaque fois que G. Frederickson a essayé de trouver un découpage articulé, il a réussi et cela sans avoir à utiliser un très grand nombre de pièces. La variante conjecturée du théorème des découpages est expérimentalement vérifiée pour les découpages articulés.

PAVAGES ET FRISES

Revenons à la méthode du pavage de Lindgren ainsi qu'à sa variante mise au point par G. Frederickson qui aide à la découverte des découpages articulés.

L'idée est de dessiner deux pavages périodiques du plan, l'un pour la première figure à laquelle on s'intéresse et l'autre pour la seconde. Les parties des pavages qui se répètent doivent être compatibles (les deux mêmes translations doivent laisser invariant chacun des pavages), ce qui est rendu assez facile par le fait que les figures dont on est parti ont la même aire. Toute figure ne peut pas être utilisée directement pour paver le plan (sans chevauchement ni interstice), par exemple les polygones réguliers à plus de six côtés ne sont pas des paveurs. C'est pourquoi Lindgren propose de prédécouper les pièces qui ne pavent pas bien le plan de façon à ce qu'un arrangement de ces pièces prédécoupées pavent le plan. Lindgren a découvert de nombreux prédécoupages des polygones réguliers se recomposant en motifs pavant le plan. Sur les figures 3 e-f-g, un prédécoupage pour le dodécagone est proposé ainsi que le pavage du plan correspondant.

Les deux pavages constitués (l'un au moins sur une feuille de papier calque), on les superpose, ce qui donne de nouveaux traits de coupe subdivisant un polygone en pièces de plus petite taille (voir la figure 3 g). En faisant glisser le calque, on recherche une superposition qui ne crée pas un trop grand nombre de pièces et surtout on s'assure – ce qui demande une certaine attention, mais est facilité par les dessins des pavages initiaux – que les pièces proposées vont correctement s'assembler pour donner les deux figures recherchées. Les subtilités et les variantes de cette technique sont nombreuses et c'est dans son utilisation que le génie géométrique de chacun pourra s'exprimer.

G. Frederickson a remarqué que lorsqu'on procédait ainsi, on obtenait souvent des découpages attachables par charnières à condition que les pièces du prédécoupage soient elles-mêmes attachables entre elles par un jeu de charnières (voir la figure 3f) et que les points d'intersection des réseaux soient des centres de rotation des réseaux, c'est-à-dire des points qui lorsqu'on fait tourner le réseau d'un angle donné (par exemple 60 degrés) le laissent invariant. Voilà qui aide la recherche. Avec cette méthode,

3. DÉCOUPAGE ARTICULÉ DU DODÉCAGONE EN CARRÉ. Un dodécagone peut être découpé en 6 pièces qui s'assemblent en carré (a-b), mais ce découpage ne donne pas une chaîne articulée. Pour obtenir cette chaîne, on conçoit un assemblage articulé de six pièces qui fait passer du dodécagone à une pièce pavant le plan (e). Les pointillés du schéma (c) identifient les angles et les longueurs utilisées dans le découpage (d) de la pièce articulée (f) qui se replie en un polygone (e) pavant le plan (g). La superposition d'un pavage du plan par des carrés (pavage en pointillé sur le schéma (g)) détermine alors un découpage articulé de l'octogone et du carré (h-j).

G. Frederickson a découvert le découpage articulé de l'octogone en carré que vous pouvez admirer sur la figure 3 h-i-j.

Une autre technique, explicitée sur la figure 2, à base de frises pavées (et qui peut être vue comme un cas particulier de la technique des pavages périodiques) permet de belles découvertes. Le découpage d'un pentagone en carré, qui *a priori* semble difficile, car la symétrie d'ordre 5 du pentagone s'accorde mal avec celle du carré, ne demande au bout du compte qu'un assemblage articulé de 7 pièces (voir la figure 6).

Parfois une adaptation subtile d'un découpage classique est possible. À l'aide de découpages supplémentaires et éventuellement de fusions soigneusement choisies, on rend articlable un découpage qui ne l'est pas. La figure 5 montre la délicate transformation du classique découpage en 5 pièces de l'octogone en carré (non articlable), qui permet d'en déduire un découpage articulé en 7 pièces.

En plus des découpages articulés avec charnières, G. Frederickson s'est intéressé à des découpages articulés avec point de fixation pivotant : les deux pièces attachées chacune par le centre d'une arête pivotent dans l'espace de 180° , l'une se retournant dessus-dessous par rapport à l'autre. Là encore de merveilleux découpages et une conjecture irrésolue (que vous devinez) attendent les amateurs (voir la figure 7).

PREUVES DE JUSTESSE

Lorsqu'on regarde un découpage (avec charnières ou non) une question se pose : où passent exactement les droites et quels sont précisément les angles utilisés ? Pour réaliser de grands modèles, vous devrez avoir correctement répondu à ces questions. Si l'ajustement est seulement approximatif, cela signifie que le découpage est faux, car nous sommes ici dans le monde pur des formes géométriques et seuls les découpages qu'on peut agrandir mille fois et qui tombent encore parfaitement nous intéressent. La réponse à la question de la mesure précise des longueurs et des angles et la preuve de la justesse totale des découpages proposés peuvent souvent être obtenues par le simple examen des figures, à la condition d'y inclure le schéma de superposition des réseaux (ou des frises) ayant conduit au découpage.

La preuve de l'exactitude du découpage se réduit donc en général à quelques dessins que l'on comprend sans rien écrire. Nous sommes dans l'un de ces domaines mathématiques où les preuves ne demandent aucun mot, et où celui qui voudrait formaliser les raisonnements risquerait de se compliquer la vie stupidement, car la longue démonstration à laquelle il aboutirait serait à la fois plus compliquée et moins claire, sans être plus persuasive, que l'examen attentif des dessins.

Contrairement à ce qu'on croit parfois en sortant d'un cours de mathématiques, produire de bonnes démonstrations ne consiste pas à décomposer un raisonnement en petits morceaux dont les liens deviennent impossibles à appréhender globalement, mais consiste à produire chez son interlocuteur une conviction totale qu'il pourra transmettre et qui lui donnera le sentiment profond de voir ce qui se passe. La formalisation est certes utile (voire inévitable dans certains domaines), mais il serait stupide lorsque les figures parlent d'elles-mêmes (même s'il faut les regarder longtemps) de procéder autre-

4. DÉCOUPAGE ARTICULÉ TRANSFORMANT UN CARRÉ EN UN OCTOGONE. Un classique découpage du carré en octogone est obtenu par une variante de la technique de superposition de pavages du plan (on pave en associant à chaque pièce un carré de plus petite taille, voir les schémas a-b-c). Hélas, aucun système de charnières ne permet d'articuler ce découpage. Après avoir découpé l'une des quatre pièces en quatre et avoir recollé deux des morceaux du nouveau découpage (d-g), G. Frederickson a obtenu cette chaîne polygonale à double repliement (e-f-g) qui fait passer de l'octogone au carré et inversement.

