

Les intégrateurs mécaniques

Au XIX^e siècle, les ingénieurs effectuaient des calculs graphiquement, à l'aide de remarquables instruments de précision – que les ordinateurs ont supplantés il y a 50 ans à peine.

En 1675, à Londres, le cartographe écossais John Ogilby publie un recueil de cartes routières d'une précision inédite. L'atlas d'une centaine de pages, intitulé *Britannia*, offre une représentation étonnamment correcte des routes reliant les principales villes d'Angleterre et du pays de Galles.

C'est le fruit de deux ans passés par le cartographe et ses nombreux assistants à arpenter les chemins anglais en mesurant les distances à l'aide d'une simple roue en bois cerclée de fer munie d'un compteur de tours. Ogilby n'était sans doute pas le premier à exploiter cette idée, sur laquelle reposent encore aujourd'hui les compteurs kilométriques des voitures. On raconte qu'en 1668, l'abbé Jean Picard avait évalué la distance entre Paris et Amiens en comptant les tours de roue d'une charrette.

Peu importe la paternité de la méthode : de la roue d'arpenteur est née une famille d'instruments de calcul des longueurs et des surfaces, puis de résolution d'équations différentielles. Ces instruments, nommés intégrateurs mécaniques, ont connu leur heure de gloire à la fin du XIX^e siècle, et l'usage en a perduré jusqu'à la Seconde Guerre mondiale, avant que les ordinateurs ne les supplantent. Retraçons-en l'histoire.

Mesurer la longueur d'une ligne droite est aisé : il suffit de reporter autant de fois que

nécessaire un mètre ou tout autre étalon de longueur sur la ligne. Un mètre ne peut cependant pas épouser parfaitement les sinuosités d'une ligne courbe. Pour mesurer la longueur des courbes sur le terrain, sur un plan ou sur une carte, les géomètres, les topographes ou les cartographes utilisaient dès le XVII^e siècle la roue d'arpenteur, ou curvimètre.

Ce système généralise l'observation évidente que lorsqu'on enroule un fil autour d'un cercle, sa longueur est égale à celle de l'arc de cercle correspondant. En suivant une courbe avec une roue constamment maintenue tangente à la courbe et sans glisser, on fait correspondre à tout instant les petits déplacements de la roue aux petits arcs de la courbe. L'angle de rotation total de la roue transcrit alors le cumul des longueurs des portions de la courbe. Le rayon de la roue n'intervenant que comme une constante multiplicative, le nombre de tours de roue effectués au terme du déplacement le long de la courbe donne sa longueur.

L'idée d'intégration se cache derrière cette méthode. Si l'on voit la courbe comme une suite d'arcs infiniment petits assimilables à de minuscules segments de droite, on obtient la longueur de la courbe en sommant les longueurs de ces segments infinitésimaux. Aux erreurs inhérentes à toute mesure physique près, la roue d'arpenteur est ainsi un instrument d'intégration exact, par comparaison avec une méthode approchée, telle celle qui consiste à planter des clous le long d'une courbe et à mesurer la longueur d'un fil tendu entre eux.

Découper les talus en tranches

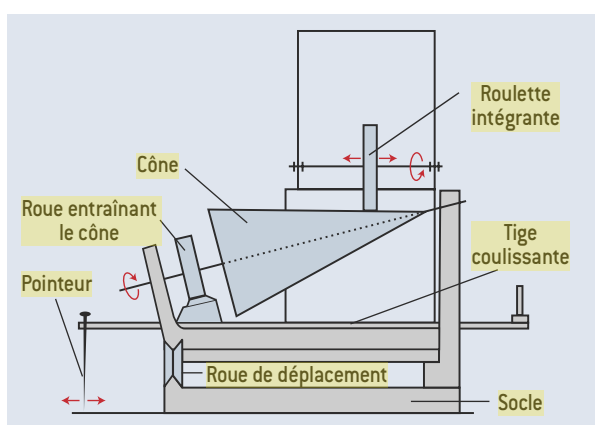
Les roues d'arpenteur ont fleuri au XVIII^e siècle en Angleterre, sous le nom de *waywiser*, puis aux États-Unis, mais elles ont tardé à se répandre sur le continent européen. La mesure des longueurs n'est cependant pas le seul problème qu'ont dû affronter les ingénieurs. Les partages entre héritiers ou les calculs de l'impôt foncier ont depuis toujours nécessité l'évaluation de la superficie de terrains de forme complexe.

C'est toutefois dans la première moitié du XIX^e siècle que le calcul des surfaces prend une importance cruciale. Les

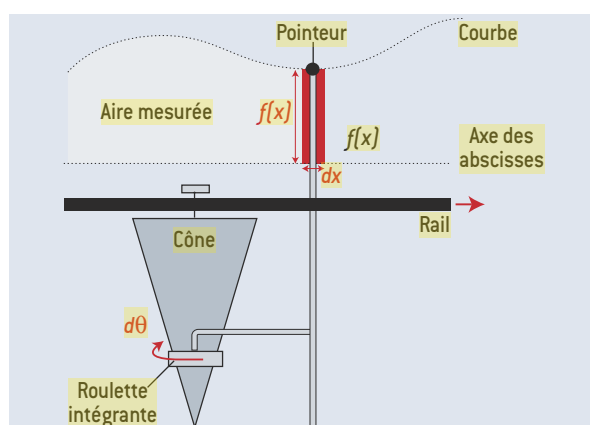
Smithsonian National Museum of American History



1. La roue d'arpenteur (ci-dessus, un modèle londonien du XVIII^e siècle) a longtemps servi à mesurer des distances : le nombre de tours de roue était enregistré par le compteur.



2. Le planimètre à cône d'Hermann (en haut, un exemplaire construit par l'atelier Ernst à Paris vers 1840, de 60 centimètres de longueur) permet de déterminer graphiquement l'aire comprise sous une courbe. L'opérateur déplace le dispositif le long d'un rail selon l'axe des abscisses tout en suivant la courbe avec un pointeur. Ce pointeur est relié par une tige à une roulette qui appuie sur un cône. Le cône, entraîné par le déplacement du dispositif, tourne autour de son axe à vitesse constante (à gauche, vue en coupe). La roulette, solidaire du pointeur, se décale le long du cône (flèches rouges) lorsque le pointeur monte ou descend



en suivant la courbe. Comme la vitesse de rotation à la surface du cône est plus rapide vers la base que vers le sommet, la vitesse de rotation de la roulette est ainsi d'autant plus grande que la hauteur $f(x)$ sous la courbe est grande (à droite, vue de dessus). La rotation instantanée de la roulette $d\theta$ est ainsi à tout instant proportionnelle à l'aire d'une bande infiniment mince sous la courbe $f(x) dx$. Son angle de rotation total θ au terme du déplacement du planimètre est ainsi proportionnel à l'aire A comprise sous la courbe entre l'abscisse de départ et celle d'arrivée ($\theta = \int d\theta = \int k f(x) dx = kA$), la constante k étant fixée par les dimensions de l'appareil.

ingénieurs du génie civil rencontrent quotidiennement ce problème en raison du développement rapide des voies de communication en Europe – routes, voies ferrées, canaux. La construction d'une voie de circulation nécessite en particulier de déblayer la terre dans les zones où le niveau du sol est trop élevé et de la transporter là où le niveau est trop bas. Il convient d'évaluer au mieux ces déblais et remblais afin de minimiser les transports de matériaux, onéreux en termes de main-d'œuvre. Avant le commencement des travaux, à partir des relevés topographiques du terrain, les ingénieurs découpent sur le plan qu'ils ont dressé le sol en tranches verticales perpendiculaires au tracé de la voie, et évaluent graphiquement les surfaces concernées, et, de là, les volumes à déplacer.

Ce procédé entraîne le calcul fastidieux d'un grand nombre de surfaces, de sorte que les ingénieurs du XIX^e siècle sont très motivés pour améliorer et mécaniser les anciennes méthodes de calcul des aires. C'est à cette époque qu'apparaissent progressivement les planimètres, des instruments

qui permettent de mesurer de manière exacte l'aire d'une surface délimitée par une courbe fermée dessinée sur un plan ou un relevé topographique. Comme pour la roue d'arpenteur, le principe repose sur l'intégration. Pour mesurer l'aire comprise sous une courbe, on la découpe en minces bandes parallèles, que l'on assimile à des rectangles. L'aire cherchée est alors approchée par la somme des aires de ces rectangles élémentaires. En prenant, en théorie, des bandes de largeur infiniment petite et en faisant une sommation infinie, on obtient l'aire exacte.

En 1814, l'ingénieur bavarois Johann Martin Hermann, employé au Bureau du cadastre et des impôts de Munich, trouve le moyen de traduire mécaniquement cette sommation en adaptant le principe de la roue d'arpenteur. L'idée est de rendre la vitesse de rotation de la roulette proportionnelle à l'ordonnée de la courbe à chaque instant, de sorte qu'un déplacement infinitésimal du dispositif entraîne une rotation de la roue proportionnelle à l'aire de la bande